

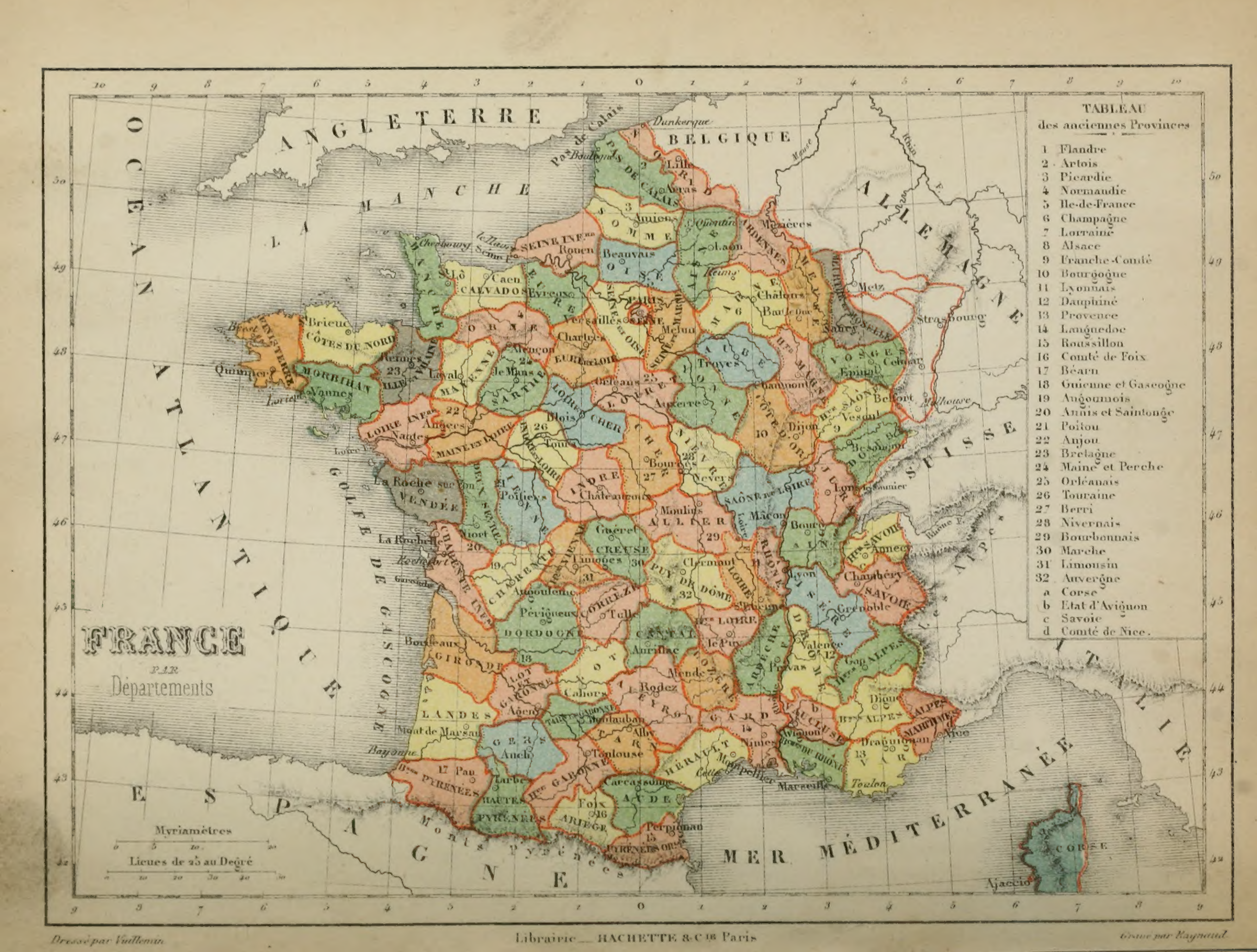


Livre de Mathématiques

Juillet 15

Année de Mathématiques

Mois de Juillet 1886


FRANCE
PAR
Départements
TABLEAU
des anciennes Provinces
1 Flandre
2 Artois
3 Picardie
4 Normandie
5 Ile-de-France
6 Champagne
7 Lorraine
8 Alsace
9 Franche-Comté
10 Bourgogne
11 Lyonnais
12 Dauphiné
13 Provence
14 Languedoc
15 Roussillon
16 Comté de Foix
17 Béarn
18 Guienne et Gascogne
19 Angoumois
20 Aunis et Saintonge
21 Poitou
22 Anjou
23 Bretagne
24 Maine et Perche
25 Orléanais
26 Touraine
27 Berri
28 Nivernais
29 Bourbonnais
30 Marche
31 Limousin
32 Auvergne
a Corse
b Etat d'Avignon
c Savoie
d Comté de Nice.
ANGLETERRE
BELGIQUE
ALLEMAGNE
SUISSE
ITALIE
ESPAGNE
OCEAN ATLANTIQUE
LA MANCHE
GOLFE DE GASCOGNE
MER MÉDITERRANÉE
Myriamètres
Lieues de 25 au Degré
Dressé par Vuillemin
Librairie _ HACHETTE & Cie Paris
Gravé par Raynaud

Résoudre un triangle connaissant la surface m^2, le côté moyen et sachant que les 3 angles sont en progression arithmétique?

Solution.

Soit α la raison. Soit $a > b > c$.

On a $A = B + \alpha$; $C = B - \alpha$, $A + B + C = 180$; $B = 60$.

On a d'après la formule de la surface d'un triangle:

$$m^2 = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$

ou $$m^2 = \frac{b^2 \sin(60+\alpha) \sin(60-\alpha)}{2 \sin 60}$$

ou $$m^2 = \frac{b^2 \sin(60+\alpha) \sin(60-\alpha)}{\sqrt{3}}$$

puisque $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc: $2 \sin(60+\alpha) \sin(60-\alpha) = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2}$.

D'où $\cos 2\alpha - \cos 120 = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2}$.

D'où $\cos 2\alpha = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} + \cos 120$

Mais $\cos 120 = -\frac{1}{2}$. D'où

$$\cos 2\alpha = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} - \frac{1}{2} = \frac{4m^2\sqrt{3} - b^2}{2b^2}$$

Connaissant α et B le triangle est facilement résolu.

Comme $\cos 2\alpha < 1$, il faut qu'on ait

$4m^2\sqrt{3} < b^2$ ou $m^2 < \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

On donne un cercle et un point A dans son plan; déterminer par une formule logarithmique les variations de l'angle sous lequel du point A on voit le diamètre quand il prend toutes les positions possibles autour du point O.

Solution.

Soit $\hat{AOC} = \alpha$, $OA = d$; $BO = OC = R$

D'après une formule trigonométrique nous avons

$$2^e \text{ surf. } ABC = AB \times AC \sin A = 2dR \sin A \quad (1)$$

On a $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 AB \times AC \cos A = \overline{BC}^2$. (2)

Mais $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OB}^2 = 2d^2 + 2R^2$. (3)

Comparant les équations (2) et (3) nous avons:

$4R^2 = 2d^2 + 2d^2 - 2 AB \times AC \cos A$; d'où

$$AB \times AC \cos A = d^2 - R^2. \quad (4)$$

Divisant (1) par (4) il vient

$$\frac{AB \times AC \sin A}{AB \times AC \cos A} = \frac{2Rd \sin A}{d^2 - R^2}. \quad \text{D'où } \operatorname{tg} A = \frac{2Rd \sin A}{d^2 - R^2}.$$

La tangente est maximum quand le sinus est maximum, quand il égale 1. Cela a lieu quand $\alpha = 90$.

Le minimum a lieu quand $\alpha = 0$. Tg max $= \infty$. min $= 0$.

La tg est $+, 0, -$ selon que $d^2 \gtreqless R^2$.

L'angle est aigu quand A est hors du cercle
— — droit — A est sur le cercle
— — obtus — A est en dedans

Chercher le quadrilatère maximum formé avec quatre lignes données.

Solution.

On a $2S = ad \sin A + bc \sin C$ (1)

Mais $\overline{BD}^2$ a deux valeurs égales ; d'où

$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

D'où $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2} = ad \cos A - bc \cos C$ (2).

Élevant au carré (1) et (2)

$4S^2 = a^2d^2 \sin^2 A + b^2c^2 \sin^2 C + 2adbc \sin A \sin C$ (3).

$\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = a^2d^2\cos^2 A + b^2c^2 \cos^2 C - 2adbc \cos A \cos C$ (4)

D'où $4S^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = a^2d^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2c^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2adbc(\cos A \cos C - \sin A \sin C)$

D'où $4S^2 = a^2d^2 \times 1 + b^2c^2 \times 1 - \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} - 2adbc \cos(A+C)$

Le maximum de $4S^2$ dépend évidemment du minimum de $2adbc \cos(A+C)$ qui dépend lui-même du minimum de $\cos(A+C)$. Ce minimum a lieu pour

$$\cos(A+C) = -1$$

Alors $A + C = 180°$

et le quadrilatère est inscriptible.

11

Connaissant dans une ellipse le grand axe A la distance focale, trouver les rayons vecteurs d'un point M de l'ellipse d'où la distance focale soit vue sous un angle α. Maximum de cet angle.

Solution

Soit $CC' = 2c$; $CM = x$; $MC' = y$.

On a $$x + y = 2a \quad (1).$$

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = 4c^2 \quad (2)$$

D'où $(x+y)^2 = 4c^2 + 2xy + 2xy\cos A$

ou $4c^2 = 4a^2 - 4xy\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

D'où $xy = \dfrac{4(a^2-c^2)}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \quad (3)$

Avec (1) et (3) on forme l'équation

$$X^2 - 2aX + \frac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

D'où $X = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = a \pm \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$

Les deux valeurs de X donnent x et y.

Condition de possibilité $a^2 \geqq \dfrac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ ou $\cos\frac{\alpha}{2} \geq \frac{b}{a}$

Le minimum de $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$. Mais $\alpha < \pi$, $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Donc le minimum de $\cos\frac{\alpha}{2}$ répond au maximum de $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Quand $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$. $x = y = a$ le point cherché est à l'extrémité du petit axe.

Chercher le maximum du rectangle inscrit [illegible]

Solution.

Soit $A\hat{O}B = 2\alpha$; $M\hat{O}F = x$; $M\hat{O}B = M\hat{O}A = \alpha$.

On a rectangle $S = 2\, FG \times FD$.

Mais $FG = R \sin x$.

D'autre part on a

$$\frac{FD}{\sin(\alpha - x)} = \frac{R}{\sin \alpha} \text{ ; d'où } FD = \frac{R \sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}$$

d'où $S = \frac{2R^2 \sin(\alpha - x) \sin x}{\sin \alpha} = \frac{2R^2}{\sin \alpha}$: constante

maximum de S = maximum de $\sin x (\sin(\alpha - x))$

Le maximum [illegible] $\sin(\alpha - x)$ n'est le même que celui de $\frac{\cos(2x - \alpha) - \cos\alpha}{2}$ lequel est déterminé par le maximum de $\cos(2x - \alpha)$.

Le maximum de $\cos(2x - \alpha)$ a lieu pour $2x - \alpha = 0$, c.à.d. $x = \frac{\alpha}{2}$. Il suffit donc de mener la bissectrice et de faire $MOF = \frac{\alpha}{2}$.

Six lumières d'égale intensité sont placées aux sommets d'un hexagone régulier dont le centre est C. Trouver sur l'apothème de cet hexagone un point M éclairé par ces lumières avec la même intensité que si ces lumières étaient toutes les six placées au centre.

Solution.

Il suffit de résoudre la question pour trois lumières.

Soit ABCNEF l'hexagone régulier; OC = R. Soit OM = x.

Nous avons pour condition à vérifier :

$$\frac{1}{\overline{BM}^2} + \frac{1}{\overline{CM}^2} + \frac{1}{\overline{NM}^2} = \frac{3}{\overline{OM}^2} = \frac{3}{x^2} \quad (1)$$

Mais $\overline{BM}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OM}^2 + 2OM \times OR = R^2 + x^2 + Rx\sqrt{3}$.

$$\overline{CM}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OM}^2 = R^2 + x^2$$

$$\overline{NM}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OM}^2 - 2OM \times [illegible] = R^2 + x^2 - Rx\sqrt{3}.$$

D'où l'équation (1) devient

$$\frac{1}{R^2+x^2+Rx\sqrt{3}} + \frac{1}{R^2+x^2} + \frac{1}{R^2+x^2-Rx\sqrt{3}} = \frac{3}{x^2}.$$

Toutes réductions faites cette équation prend la forme

$$3R^2x^4 + 3x^2R^4 - 3R^6 = 0; \text{ ou } x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0$$

De laquelle nous tirons $x^2 = \frac{-R^2 \pm \sqrt{5R^4}}{2} = \frac{R^2(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

Il n'y a que la solution + qui convienne car la valeur x^2 est négative et donnerait un point en dehors de l'hexagone.

Nous prendrons donc $x^2 = \frac{R^2(-1+\sqrt{5})}{2}$

D'où $x = \sqrt{\frac{R^2(-1+\sqrt{5})}{2}} = R\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} =$ [illegible]

On donne un triangle équilatéral ABC dans lequel AB = a [illegible] d'un point F situé sur BC à la distance b du sommet C on mène [illegible] parallèle DE à BC, tel que le segment DE [illegible] triangle [illegible] rectangle [illegible] FE [illegible]

Solution.

Soit CD = x ; CF = b ; DE = AD = AE = a − x. DI = IE, AH étant perpendiculaire à DE.

On a $\overline{FI}^2 = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 = \overline{IH}^2 + \overline{FH}^2$, le milieu de l'hypoténuse étant à égale distance des 3 sommets puisque DFE est droit. Mais

$FH = \frac{a-2b}{2}$. D'où $\overline{FI}^2 = \overline{IH}^2 + \left(\frac{a-2b}{2}\right)^2$ (1).

Mais IH = DK et nous avons

$\frac{AH}{DK} = \frac{a}{x}$ d'où $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{DK}^2} = \frac{a^2}{x^2}$ ou $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{DK}^2} = \frac{a^2}{x^2}$. Mais $\overline{AH}^2 = \frac{3a^2}{4}$.

D'où $\frac{\frac{3a^2}{4}}{\overline{DK}^2} = \frac{a^2}{x^2}$. D'où $\overline{DK}^2 = \frac{3x^2}{4}$.

Remplaçant cette valeur de $\overline{DK}^2$ avec $\overline{IH}^2$ dans (1) il vient :

$\left(\frac{a-x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4} + \left(\frac{a-2b}{2}\right)^2$; (2)

d'où $(a-x)^2 = 3x^2 + (a-2b)^2$.

D'où $a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2 + a^2 - 4ab + 4b^2$.

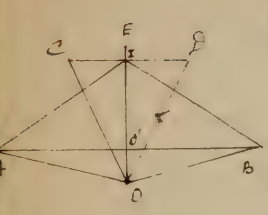
D'où $2x^2 + 2ax - 4ab + 4b^2 = 0$

Divisant par (2) les deux membres il vient

$x^2 + ax - 2b(a-b) = 0$.

D'où nous tirons

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2b(a-b)}$$



Un plan coupe une sphère de rayon R suivant un cercle de rayon a ; à quelle distance faut-il mener un plan parallèle pour que la tranche sphérique comprise entre les deux plans soit m fois plus grande que le cône ayant le nouveau cercle pour base et pour sommet le centre du premier.

Solution

Soit $CO = DO = R$; $ID = IC = a$; soit $OO' = x$.

On a $\overline{IO}^2 = \overline{DO}^2 - \overline{ID}^2 = R^2 - a^2$

Volume $ABDC = \frac{1}{2}\pi IO'(\overline{AO'}^2 + \overline{CI}^2) + \frac{1}{6}\pi \overline{IO'}^3 = \frac{\pi}{2}(h-x)(R^2-x^2+a^2) + \frac{\pi(h-x)^3}{6}$

Volume $AOB = \frac{1}{3}\pi IO' \times \overline{AO'}^2 = \frac{1}{3}\pi(h-x)(R^2-x^2)$.

L'on a donc d'après l'énoncé

$\frac{1}{2}\pi(h-x)(R^2+a^2-x^2) + \frac{1}{6}\pi(h-x)^3 = \frac{1}{3}m\pi(h-x)(R^2-x^2)$.

Divisant les deux membres par $\frac{\pi(h-x)}{6}$, et réduisant, on trouve pour résultat

$3R^2 - 3x^2 + 3a^2 + h^2 - 2hx + x^2 - 2mR^2 + 2mx^2 = 0$

Remplaçant h^2 par sa valeur $R^2 - a^2$ on a

$3R^2 - 3x^2 + 3a^2 + R^2 - a^2 - 2hx + x^2 - 2mR^2 + 2mx^2 = 0$

D'où $4R^2 - 2x^2 + 2a^2 - 2hx - 2mR^2 + 2mx^2 = 0$

Mettant en facteur commun x^2

$2(m-1)x^2 - 2hx + 4R^2 - 2mR^2 + 2a^2 = 0$

D'où $x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 8R^2m + 8R^2 + 4m^2R^2 - 4mR^2 - 4a^2m + 4a^2}}{2(m-1)}$

Si $m = 3$, $x' = \frac{h}{2}$, $x'' = -h$.

Sur une droite AB on prend un point C'' entre A et B et sur les segments AC = 2R, AC'' = 2R''. C'B = C'A = 2R' on décrit [illegible] circonférences O, O', O''. [illegible] 15 [illegible] [illegible] forme par les [illegible]

Solution.

Soit $OB = R$ · $C'B = R'$; $C''A = R''$; $CK = x$; $IB = r$

Nous avons $\overline{IO'}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{OI}^2 + 2OO' \times OK$

ou $(R'+r)^2 = (R-R')^2 + (R-r)^2 + 2x(R-R')$ (1)

On a aussi $\overline{IO''}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{OI}^2 - 2OO'' \times OR$

ou $(R''+r)^2 = (R-R'')^2 + (R-r)^2 - 2x(R-R'')$ (2).

De la 1re équation on tire la valeur de x:

$$x = \frac{r(R+R') - R(R-R'')}{R-R'}$$

Substituant dans la seconde et effectuant les calculs on trouve

$$r = \frac{4RR'R'' + 4R^2(R-R'-R'')}{R^2 - R'R''}$$

Mais $R - R' - R'' = 0$; [illegible]

$4R^2(R-R'-R'')$ devient [illegible]

[illegible] $r = \frac{4RR'R''}{R^2 + R'R''}$

Si on a $R' = R'' = \frac{R}{2}$ la valeur de r

[illegible] $r = \frac{4R \times \frac{R}{2} \times \frac{R}{2}}{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{\frac{4R^3}{4}}{\frac{5R^2}{4}}$

$= \frac{R^3}{5R^2} = \frac{R}{5}$.

Les bases d'un trapèze sont a et b. Il est circonscrit à un cercle de rayon R. Calculer les segments déterminés sur les bases par les points de contact.

Solution.

Soit $OK = R$, $MB = y$; $ND = x$; $AB = b$; $CD = a$.

Les angles $K\hat{B}C$, $C\hat{D}K$ étant complémentaires, il s'ensuit que $B\hat{O}D = 90$ et que le triangle BOD est rectangle en O, et OK étant perpendiculaire à l'hypothénuse BD on a

$$\overline{OK}^2 = BK \times KD \quad \text{ou} \quad R^2 = xy \quad (1)$$

Mais le triangle AOC est aussi rectangle et donne

$$\overline{OS}^2 = SA \times SC \quad \text{ou} \quad R^2 = (b-y)(a-x) \quad (2)$$

D'où $xy = (b-y)(a-x)$

ou $xy = ab - ay - bx + xy$.

D'où $ab = ay + bx$. Mais $y = \frac{R^2}{x}$

D'où $ab = \frac{R^2 a}{x} + bx$.

D'où $bx^2 - abx + R^2 a = 0$

D'où $x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4abR^2}}{2b} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{aR^2}{b}}$

La condition de possibilité pour x est $a^2b^2 > 4abR^2$ ou $ab > 4R^2$.

$y = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4abR^2}}{2a}$ même condition de possibilité.

Quand $ab = 4R^2$ le trapèze est [illegible].

$y = x = \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$.

Dans un triangle ABC rectangle en A, mener une parallèle DE au côté AC telle que le volume engendré par BDE soit la moitié du volume engendré par ABC quand la figure tourne autour de AC.

Solution

Soit $AC = b$; $BA = c$; $DA = x$; $BD = c - x$; $DE = y$.

Le volume engendré par un triangle BDE tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le rencontrant pas sur sa surface s'obtient en multipliant la surface du triangle BDE par la circonférence décrite par son centre de gravité.

Volume BDE $= 2\pi\left(x + \dfrac{c-x}{3}\right)\left(\dfrac{c-x}{2}\right)y.$

Volume BAC $= \dfrac{\pi c^2 b}{3}$. D'où, d'après l'énoncé,

$2\pi\left(\dfrac{2x+c}{3}\right)\left(\dfrac{c-x}{2}\right)y = \dfrac{\pi c^2 b}{6}$. (1)

Mais on a $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BA}{BD}$; ou $\dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{c-x}$; d'où $y = \dfrac{(c-x)b}{c}$.

Remplaçant dans l'équation (1) il vient après avoir effectué

$4bx^3 - 6bcx^2 + 2bc^3 = bc^3$. D'où $4x^3 - 6cx^2 + 2c^3 = c^3$. D'où

$4x^3 - 6cx^2 + c^3 = 0$. D'où $4x^3 - 2cx^2 - 4cx^2 + c^3 = 0$

D'où $2x^2(2x - c) - c(4x^2 - c^2) = 0$. D'où $2x^2(2x-c) - c(2x-c)(2x+c) = 0$

D'où $(2x - c)(2x^2 - 2xc - c^2) = 0$.

D'où $2x - c = 0$. D'où $2x = c$, $x = \dfrac{c}{2}$ 1re solution.

On a encore $2x^2 - 2xc - c^2 = 0$. D'où $x = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 + 2c^2}}{2}$

$= \dfrac{c \pm \sqrt{3c^2}}{2} = \dfrac{c(1 \pm \sqrt{3})}{2}$. $x' = \dfrac{c(1+\sqrt{3})}{2} = c\,1{,}366$; $x'' = \dfrac{c(1-\sqrt{3})}{2} = -0{,}366\,c$.

Calculer les rayons x et y d'un tronc de cône à base circulaire connaissant son volume, sa hauteur et son apothème.

Solution.

Soit $C'B = y$; $CD = x$; $CC' = h$. On a

Volume $ABDC = \frac{\pi CC'}{3}\left(\overline{CD}^2 + \overline{C'B}^2 + CD \times C'B\right) = \frac{\pi h}{3}\left(x^2 + y^2 + xy\right)$

Si on fait $V = \frac{\pi h m^2}{3}$, on a

$$m^2 = x^2 + y^2 + xy. \quad (I)$$

Menant BK parallèle à CC' on a $CC' = BK$; $C'B = CK$.

On a $\overline{BD}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KD}^2$ ou $a^2 = h^2 + \overline{KD}^2$; mais $KD = x - y$ donc

$a^2 = h^2 + (x-y)^2$; d'où $x - y = \sqrt{a^2 - h^2}$; d'où $y = x - \sqrt{a^2 - h^2}$.

Remplaçant y par sa valeur dans l'équation I :

$m^2 = x^2 + \left(x - \sqrt{a^2 - h^2}\right)^2 + x\left(x - \sqrt{a^2 - h^2}\right)$ ou

$m^2 = x^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - h^2 + x^2 - x\sqrt{a^2 - h^2}$ ou

$$3x^2 - 3x\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - h^2 - m^2 = 0.$$

d'où $x = \frac{3\sqrt{a^2 - h^2} \pm \sqrt{9(a^2 - h^2) - 12(a^2 - h^2 - m^2)}}{6}$

$x = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9(a^2 - h^2) - 12(a^2 - h^2) + 12m^2}{9}}$

$x = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12m^2 - 3(a^2 - h^2)}{9}}$

$x = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^2 - (a^2 - h^2)}{3}} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^2 - a^2 + h^2}{3}}$

$y = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^2 - a^2 + h^2}{3}} - \sqrt{a^2 - h^2}$

$= \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^2 - a^2 + h^2}{3}} - \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2}$

Étant donné un cercle de rayon R [illegible] perpendiculaire au diamètre AB [illegible] CED [illegible] AB [illegible] C [illegible]

Solution.

Soit CA [illegible] CE = R, OD = x.

On a Volume $COD = \frac{\pi \overline{CD}^2 \times OD}{3}$.

Mais $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{OD}^2 = R^2 - x^2$. D'où

$$\text{Volume } COD = \frac{\pi x (R^2 - x^2)}{3} = \frac{\pi x (R-x)(R+x)}{3}$$

Segment vol $CMA = \frac{\pi \overline{CA}^2 \times DA}{6}$.

Mais $\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = (R^2 - x^2) + (R-x)^2$. $DA = R - x$. D'où

Segment vol $CMA = \frac{\pi \left((R^2 - x^2) + (R-x)^2\right)(R-x)}{6}$.

D'après l'énoncé, on a donc :

$$\frac{\pi (R-x) x (R+x)}{3} = \frac{\pi \left((R^2 - x^2) + (R-x)^2\right)(R-x)}{6}$$

Divisant les deux membres par $\frac{\pi (R-x)}{3}$ il vient

$(R+x)x = \frac{(R^2 - x^2) + (R-x)^2}{2}$; d'où l'équation

$$2x^2 + 4Rx - 2R^2 = 0 \quad (8)$$

D'où $x = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 4R^2}}{2}$. Divisant par 2 il vient

$$x = -R \pm R\sqrt{2} ; \quad x = ~~R(\sqrt{2} \pm 1)~~ = R(\pm\sqrt{2} - 1)$$

Il y a encore une autre solution. L'équation (8) peut s'écrire en divisant par 2 et changeant x en $-x$

[illegible]

Couper une sphère par un plan tel que la somme des surfaces de la calotte sphérique et du cercle de section soit égale à un carré donné m^2.

Solution.

Soit $OC = R$ soit ABC le cercle de la calotte sphérique

$BO = x$; $BM = R - x$. On a :

Surface calotte $AMC = 2\pi OC \times BM = 2\pi R(R-x)$

Surface cercle $ABC = \pi \overline{BC}^2$. Mais $\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = R^2 - x^2$

D'où surface cercle $ABC = \pi(R^2 - x^2) = \pi(R+x)(R-x)$

D'où surf. tot. calotte $= 2\pi R(R-x) + \pi(R+x)(R-x) = 2\pi R^2 - 2\pi Rx + \pi R^2 - \pi x^2$

D'après notre énoncé, égalant à πm^2 cette surface totale de la calotte sphérique et du cercle de section, on a

$$2R^2 - 2Rx + R^2 - x^2 = m^2 \text{ ; ou}$$

$$x^2 + 2Rx - 3R^2 + m^2 = 0.$$

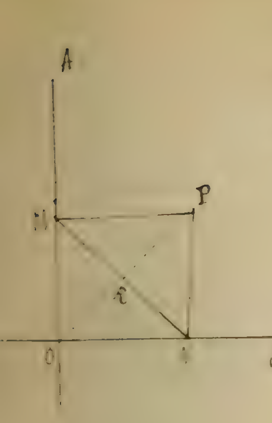
D'où $x = -R \pm \sqrt{R^2 + 3R^2 - m^2} = -R \pm \sqrt{4R^2 - m^2}$

Pour que le problème soit possible il faut que l'on ait

$$4R^2 - m^2 > 0 \text{ ou } 4R^2 > m^2 \text{ ou } m^2 < 4R^2.$$

Le maximum de m^2 est donc $4R^2$ lorsque

$x = -R$



On donne un angle droit ACB et un point P [illegible] cet angle [illegible] et [illegible] AC, BC [illegible] PM, PN [illegible] triangle PMN soit équilatéral.

Solution

Soit $PC = d$; $MC = CN = x$; $MP = PN = MN = y$.

Nous avons $\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2$ ou $y^2 = 2x^2$ (1).

Prenons dans le triangle RPN

$\overline{NP}^2 = \overline{RN}^2 + \overline{RP}^2$ d'où [illegible]

D'où $y^2 = \frac{y^2}{4} + (CP - CR)^2$ Mais $CR = \sqrt{\overline{CN}^2 - \overline{RN}^2} = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$.

D'où $RP = d - \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$

D'où $y^2 = \frac{y^2}{4} + \left(d - \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}\right)^2$ (2).

ou $y^2 = \frac{y^2}{4} + d^2 - 2d\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} + x^2 - \frac{y^2}{4}$ (2)'

ou $y^2 = d^2 - 2d\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} + x^2$ (2)''

Remplaçant y^2 par sa valeur tirée de (1) il vient

$$2x^2 = d^2 - 2d\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{2}} + x^2$$

ou $x^2 = d^2 - 2d\sqrt{\frac{2x^2 - x^2}{2}} = d^2 - 2d\sqrt{\frac{x^2}{2}}$

ou $x^2 = d^2 - \sqrt{\frac{4d^2x^2}{2}} = d^2 - \sqrt{2d^2x^2}$

d'où $x^2 = d^2 - dx\sqrt{2}$. D'où

$$x^2 + dx\sqrt{2} = d^2.$$

$$x = \frac{-d\sqrt{2} \pm \sqrt{2d^2 + 4d^2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$$

Calculer le rayon x et la hauteur y d'un cône connaissant son volume et sa surface totale.

[S]olution

Soit ABC le cône. $DC = x$; $AD = y$.

On a $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$. Mais si l'on pose $V = \frac{\pi m^3}{3}$

on a $\frac{\pi m^3}{3} = \frac{\pi x^2 y}{3}$, ou $m^3 = x^2 y$. (1).

On a S. totale $ABC = \frac{2\pi x AC}{2} + \pi x^2 = \pi(x AC + x^2)$.

Si l'on pose S[urface] $= \pi s^2$ on a

$$s^2 = x AC + x^2 \quad (2).$$

Mais on a $AC = \sqrt{x^2+y^2}$.

Portant cette valeur dans la [illegible]

$$s^2 = x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 \text{ d'où } (s^2 - x^2)^2 = x^2(x^2+y^2) \quad (3)$$

De (1) nous tirons $y = \frac{m^3}{x^2}$; d'où $y^2 = \frac{m^6}{x^4}$. Portant dans (3)

$(s^2 - x^2)^2 = x^2\left(x^2 + \frac{m^6}{x^4}\right) = \frac{x^2(x^6+m^6)}{x^4} = \frac{x^6+m^6}{x^2}$.

D'où $x^6 + m^6 = (s^4 - 2s^2x^2 + x^4)x^2$ ou

$x^6 + m^6 = s^4x^2 - 2s^2x^4 + x^6$; d'où

$$2s^2x^4 - s^4x^2 + m^6 = 0$$

D'où $x^2 = \frac{s^4 \pm \sqrt{s^8 - 8s^2m^6}}{4s^2} = \frac{s(s^3 \pm \sqrt{s^6 - 8m^6})}{4s^2}$

$= \frac{s^3 \pm \sqrt{s^6 - 8m^6}}{4s}$ Condition $8m^6 < s^6$ [illegible]

Sur les côtés CA, CB d'un triangle ABC on prend CG = CF = d et l'on joint FG. On demande de transformer le triangle isocèle CFG en un autre triangle CED équivalent par une droite DE telle que AD = BE.

Solution.

Soit $BC = a$, $CG = CF = d$, $EB = DA$.

On aura $CE = a - x$; $CD = b - x$. Or d'après l'énoncé

Sur. CED = Sur. CGF. Nous savons en outre que

deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux

comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle.

Donc $\frac{S.CED}{S.CGF} = \frac{CE \times CD}{CG \times CF}$.

Mais $CE = a - x$; $CD = b - x$; $CG = CF = d$; et comme,

par hypothèse, $S.CED = S.CGF$, il vient

$CE \times CD = CG \times CF$; ou

$$(a-x)(b-x) = d^2.$$

D'où $x^2 - x(a+b) + ab - d^2 = 0$; d'où

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + d^2}.$$

D'où $x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4} - ab + d^2}$

d'où $x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4} + d^2}$

$= \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2-2ab}{4} + d^2}$

$= \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + d^2}$

On donne un cercle de rayon R et un point intérieur A à une distance d du centre ; mener par le point A une corde qui soit divisée par ce point en moyenne et extrême raison.

Solution

Soit A le point donné, $AO = d$; $ON = R$, $MA = x$. $AN = y$.

Puisque A divise MN en moyenne et extrême raison on a :

$$\overline{MA}^2 = MN \times AN \quad \text{ou} \quad x^2 = xy + y^2 \quad (1)$$

On a aussi $\overline{AO}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{ON}^2 - 2\,AN \times BN$.

ou $$d^2 = y^2 + R^2 - 2y \times BN.$$

Mais nous avons $BN = MB = \frac{MN}{2} = \frac{x+y}{2}$

D'où $d^2 = y^2 + R^2 - \frac{2y(x+y)}{2}$; $d^2 = y^2 + R^2 - y(x+y)$

ou $d^2 = R^2 - xy$ (2) équation d'où on tire $y = \frac{R^2 - d^2}{x}$.

Portant dans (1) cette valeur de y, il vient :

$$x^2 = x\frac{(R^2-d^2)}{x} + \left(\frac{R^2-d^2}{x}\right)^2 ; \quad x^2 = R^2 - d^2 + \left(\frac{R^2-d^2}{x}\right)^2.$$

ou $$x^4 = (R^2-d^2)x^2 + (R^2-d^2)^2$$

ou $$x^4 - x^2(R^2-d^2) - (R^2-d^2)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{R^2-d^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2-d^2}{2}\right)^2 + (R^2-d^2)^2}$$

ou $$x^2 = \frac{R^2-d^2}{2} \pm \sqrt{\frac{5(R^2-d^2)^2}{4}} = \frac{R^2-d^2 \pm (R^2-d^2)\sqrt{5}}{2}$$

$= \frac{(R^2-d^2)(1 \pm \sqrt{5})}{2}$. La seule valeur est $x^2 = \frac{R^2-d^2}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Pour trouver y on aurait de même [illegible]

$$y^2 = \frac{(3-\sqrt{5})(R^2-d^2)}{2}$$

On donne une sphère O et un diamètre CD. Trouver à quelle distance du centre il faut mener un plan AB perpendiculaire à CD pour que le volume du cône ABD soit double de [illegible]

Solution.

Soit AB le plan sécant; ACB la calotte; ABD le cône. On a

Volume cône $ABD = \frac{\pi \overline{IB}^2 \times ID}{3}$. Mais, posant $IO = x$, on a

$\overline{IB}^2 = R^2 - x^2$. $ID = R + x$; il vient donc

Volume cône $ABD = \frac{\pi(R^2-x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi(R+x)^2(R-x)}{3}$.

Volume calotte $ACB = \frac{\pi \overline{IB}^2 \times CI}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{CI}{2}\right)^3$

$= \frac{\pi(R^2-x^2)(R-x)}{2} + \frac{4\pi(R-x)^3}{24} = \frac{\pi[3(R^2-x^2)(R-x)+(R-x)^3]}{6}$

On a, par hypothèse, $\frac{\pi[3(R^2-x^2)(R-x)+(R-x)^3]}{3} = \frac{(R+x)^2(R-x)\pi}{3}$

Divisant par π et multipliant par (3) il vient:

$3(R^2-x^2)(R-x)+(R-x)^3 = (R+x)^2(R-x)$.

Divisant les deux membres par $(R-x)$ il vient

$3(R-x)(R+x)+(R-x)^2 = (R+x)^2$; ou

$3R^2 - 3x^2 + R^2 - 2Rx + x^2 = R^2 + x^2 + 2Rx$.

d'où $3x^2 + 4Rx - 3R^2 = 0$.

D'où $x = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2+9R^2}}{3} = \frac{-2R \pm \sqrt{13R^2}}{3}$

d'où $x = \frac{-2R \pm R\sqrt{13}}{3} = \frac{R}{3}(-2 \pm \sqrt{13})$

$x' = \frac{R}{3}(\sqrt{13} - 2)$

$x'' = \frac{R}{3}(-\sqrt{13} - 2) = -\frac{R}{3}(\sqrt{13} + 2)$

On donne un triangle isocèle ABC dont la base BC est [illegible] [illegible] côté AB [illegible] [illegible] [illegible] sur BC deux points D, E, et sur les côtés AB, AC deux autres points F, G [illegible] que le pentagone $DEFAG$ soit équilatéral.

Solution.

Soit $AB = AC = c$; $BC = 2b$; $AH = h$; $BH = HC = b$, $DH = HE = x$.

$AF = GA = GD = DE = EF = 2x$. $MG = MF = y$. $KG = z$.

On a $\frac{KG}{AH} = \frac{BG}{AB}$: ou $\frac{z}{h} = \frac{c - 2x}{c}$ (1)

Le triangle KGD nous donne $z^2 = 4x^2 - (x - y)^2 = 3x^2 + 2xy - y^2$

Élevant (1) au carré il vient

$\frac{3x^2 + 2xy - y^2}{h^2} = \frac{c^2 - 4cx + 4x^2}{c^2}$; ou $3c^2x^2 + 2xyc^2 - c^2y^2 = c^2h^2 - 4ch^2x + 4x^2h^2$ (1)'

On a encore $\frac{MG}{BH} = \frac{AG}{AB}$; $\frac{y}{b} = \frac{2x}{c}$; d'où $y = \frac{2xb}{c}$.

Portant dans (1)' cette valeur de y on aura.

$3c^2x^2 - 4x^2b^2 + 4x^2bc = c^2h^2 - 4cxh^2 + 4x^2h^2$ (1)''.

Mais $h^2 = c^2 - b^2$; si nous substituons cette valeur au

dernier terme de l'équation (1)'' cette équation peut s'écrire

$3c^2x^2 - 4x^2b^2 + 4x^2bc = c^2h^2 - 4cxh^2 + 4c^2x^2 - 4x^2b^2$

ou encore $c^2x^2 - 4x^2bc - 4cxh^2 + c^2h^2 = 0$

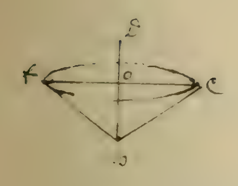
Si nous divisons par c il vient

$x^2(c - 4b) - 4xh^2 + ch^2 = 0$

$x = \frac{2h^2 \pm \sqrt{[illegible]}}{c - 4b} = \frac{h \cdot 2h \pm [illegible]}{c - 4b}$

Couper une sphère par un plan de manière que la calotte soit égale à la surface latérale du cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle de section

Solution.



Soit ACE la figure ayant AO = R ; AO = x, OE = R − x

La surface de la calotte $AEC = 2\pi AO \times OE = 2\pi R(R-x)$

La surface latérale du cône $ACO = \pi OC \times AC = \pi R\sqrt{R^2-x^2}$.

D'après l'énoncé on a donc :

$$2\pi R(R-x) = \pi R\sqrt{R^2-x^2}.$$

Divisant par πR les deux membres il vient :

$$2(R-x) = \sqrt{R^2-x^2}.$$

Élevant au carré cette nouvelle équation, on a :

$$4R^2 - 8Rx + 4x^2 = R^2 - x^2.$$

D'où $3R^2 - 8Rx + 5x^2 = 0$

$$5x^2 - 8Rx + 3R^2 = 0$$

$$x = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 - 15R^2}}{5}.$$

D'où $x = \frac{4R \pm \sqrt{R^2}}{5} = \frac{4R \pm R}{5} = \frac{R(4 \pm 1)}{5}$.

D'où $x' = \frac{4R+R}{5} = \frac{5R}{5} = R$

$$x'' = \frac{4R-R}{5} = \frac{3R}{5}.$$

Trouver les 3 côtés d'un triangle rectangle dont les côtés et la surface sont trois nombres entiers consécutifs

Solution.

Soit S la surface du triangle, x, y, z les côtés.
D'après l'énoncé on a $x = x$, $y = x+1$; $z = x+2$. $S = x+3$.
Appliquant ici la formule connue
$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$ on a
$$(x+3)^2 = \frac{x+x+1+x+2}{2}\left(\frac{x+x+1+x+2}{2}-x\right)\left(\frac{x+x+1+x+2}{2}-x-1\right)\left(\frac{x+x+1+x+2}{2}-x-2\right)$$
ou $$(x+3)^2 = \frac{3x+3}{2}\left(\frac{3x+3-2x}{2}\right)\left(\frac{3x+3-2x-2}{2}\right)\left(\frac{3x+3-2x-4}{2}\right)$$
ou $$(x+3)^2 = \frac{3x+3}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
Divisant les deux membres par $x+3$ il vient;
$$(x+3) = \frac{3x+3}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
D'où $$x+3 = \frac{3x+3}{4}\times\frac{x^2-1}{4}$$
D'où $$x+3 = \frac{3x^3+3x^2-3x-3}{16}.$$
Réduisant au même dénominateur les deux membres de cette dernière équation il vient
$$16x+48 = 3x^3+3x^2-3x-3; \text{ ou}$$
$$3x^3+3x^2-19x-51 = 0$$
équation qui admet 3 pour racine. Alors S: $y = 4$. $z = 5$. $S = 6$.

Un trapèze donné ABEF est limité par 3 droites AE, BF, AB. Mener parallèlement à EF une droite CD telle que le trapèze CDEF soit équivalent au quadrilatère ABCD. On donne les parallèles à EF; AA' = a; BB' = b, et leur distance AH = h.

Solution.

Soit $AA' = a$; $BB' = b$; $AH = h$; $B'H = b - a$; $CK = y$; $AK = h - x$.

On a $\frac{CK}{B'H} = \frac{AK}{AH}$; ou $\frac{y}{b-a} = \frac{h-x}{h}$ (1).

Comme, par hypothèse le trapèze CDEF est équivalent au quadrilatère ABEF en retranchant une même quantité BB'EF à ces deux figures il reste le trapèze CDBB' équivalent au triangle ABB'. Celui-ci a pour surface $\frac{bh}{2}$.

La surface du trapèze CDBB' est $\left(\frac{y+a+b}{2}\right)x$

D'où $\left(\frac{y+a+b}{2}\right)x = \frac{bh}{2}$ (k)

ou $(y+a+b)x = bh$ (2).

De (1) nous tirons $y = \frac{(h-x)(b-a)}{h}$. Substituant dans (2)

$\left(\frac{(h-x)(b-a)}{h} + (a+b)\right)x = bh.$

D'où $\left((h-x)(b-a) + h(a+b)\right)x = bh^2$

Effectuant on trouve

$-bhx + x^2 b + xha - ax^2 - xha - bhx + bh^2 = 0$

D'où $x^2(b-a) - 2bhx + bh^2 = 0$

D'où $x = \frac{bh \pm \sqrt{b^2h^2 - b^2h^2 + abh^2}}{(b-a)} = \frac{bh \pm h\sqrt{ab}}{b-a} = h \times \frac{b \pm \sqrt{ab}}{b-a}$

Un arpenteur est placé en un point O de la diagonale CA d'un carré ABCD il mesure les distances OA = a = 59,16; OB = b = 78 du point O aux extrémités A et B du côté AB. Calculer le côté AB du carré. Interpréter la solution négative et construire les racines.

Solution

Soit O le point où se trouve l'arpenteur; soit

OB = b = 78^m; OA = a = 59,16. AB = x

D'après un théorème de Géométrie nous avons:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AB}^2 + 2AO \times AE$$

ou $b^2 = a^2 + x^2 + \frac{2ax\sqrt{2}}{2} = a^2 + x^2 + ax\sqrt{2}$.

D'où $x^2 + ax\sqrt{2} - b^2 + a^2 = 0$

$$x = \frac{-a\sqrt{2} \pm \sqrt{2a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2}$$

$x = -a\sqrt{2} \pm \sqrt{4b^2 - 2a^2}$; Remplaçant les lettres par leur valeur en chiffres on a

$$\frac{-59,16 \times 1,414 \pm \sqrt{4 \times 78^2 - 2 \times 59,16^2}}{2} = 84^m.$$

Interprétons maintenant la solution négative.

Prolongeons la diagonale CA au delà de A en C'

nous aurons alors $\overline{BC'}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CC'}^2 - 2CC' \times C'E$

ou $x^2 = b^2 + (x\sqrt{2} - a)^2 - 2(x\sqrt{2} - a)\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} - a\right)$

d'où $x^2 - ax\sqrt{2} + a^2 - b^2 = 0$ d'où $x = \frac{a\sqrt{2} + \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$

= − il en donnant la solution négative. Condition pour [illegible] $2b^2 > a^2$; ou $b\sqrt{2} > a$. Minimum de $b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire que b doit toujours être plus grand que BE [illegible] perpendiculaire sur AC puisque BE est [illegible]

On donne un cercle C une droite XY tangente au cercle en un point C [illegible] A. sur XY deux points A et B ayant la distance est 2b, on connait aussi la distance du point D milieu de AB au point C, elle est égale à d. Calculer [illegible] [illegible] tangent à C et passant par A et B.

Solution.

Soit $OC = R$; $BO' = x$, $AD = DB = b$; $CD = d$.

On a $\overline{O'D}^2 = \overline{O'B}^2 - \overline{DB}^2 = x^2 - b^2$. D'où $C'D = \sqrt{x^2 - b^2}$.

Menons MC' parallèle à XY, on aura $MC = C'D = OC - MO$
$= R - MO$. Mais $\overline{MO}^2 = \overline{OO'}^2 - \overline{MO'}^2 = (R+x)^2 - d^2$.

D'où $MO = \sqrt{(R+x)^2 - d^2}$. D'où MC ou $C'D = R - \sqrt{(R+x)^2 - d^2}$.

Égalant ces deux valeurs de $C'D$, il vient.

$$\sqrt{x^2 - b^2} = R - \sqrt{(x+R)^2 - d^2}.$$

Élevant au carré il vient:

$$x^2 - b^2 = R^2 - 2R\sqrt{(x+R)^2 - d^2} + (R+x)^2 - d^2.$$

D'où $2R\sqrt{(x+R)^2 - d^2} = 2Rx + 2R^2 + b^2 - d^2$.

Élevant de nouveau au carré on trouve, réductions faites,

$$4Rx(d^2 - b^2) = 4R^2b^2 + d^4 + b^4 - 2b^2d^2.$$

D'où $4Rx(d^2 - b^2) = 4R^2b^2 + (d^2 - b^2)^2$

$$x = \frac{4R^2b^2 + (d^2 - b^2)^2}{4R(d^2 - b^2)}$$

$$x = \frac{4R^2b^2}{4R(d^2 - b^2)} + \frac{(d^2 - b^2)(d^2 - b^2)}{4R(d^2 - b^2)}$$

$$x = \frac{Rb^2}{d^2 - b^2} + \frac{d^2 - b^2}{4R}$$

Une figure plane est formée par quatre triangles égaux isocèles assemblés de manière que leurs bases forment le côté d'un carré, chaque triangle ayant son côté opposé au carré par rapport à la base. Si le sommet AA' BB' CC' DD' est constant et égal à 8p quel est le maximum de la surface totale de cette figure?

Solution.

Soit BB' = p. BC = 2x. AB' = h = $\sqrt{p^2-x^2}$.

La surface à rendre maximum est

$$4x\sqrt{p^2-x^2}+4x^2=m.$$

D'où $4x\sqrt{p^2-x^2}=m-4x^2$.

Élevant au carré il vient $32x^4-8x^2(m+2p^2)+m^2=0$

$$x^2=\frac{4(m+2p^2)\pm\sqrt{16m^2+64mp^2+64p^4-32m^2}}{32}$$

Condition de possibilité $16m^2<64mp^2+64p^4$ ou $m^2<4mp^2+4p^4$

Le maximum de m a lieu quand $m^2-4mp^2-4p^4=0$

Alors $m=2p^2\pm\sqrt{4p^4+4p^4}=2p^2(1+\sqrt{2})$

La valeur de x correspondant à ce maximum est:

$$x^2=\frac{4(2p^2(1+\sqrt{2})+2p^2)}{32}=\frac{p^2+p^2\sqrt{2}+p^2}{4}$$

$$=\frac{2p^2+p^2\sqrt{2}}{4}=\frac{p^2(2+\sqrt{2})}{4}$$

Extrayant la racine, on a

$$x=\frac{p\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\text{ ou } x=\frac{p}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

On donne un demi-cercle de rayon R décrit sur le diamètre AB ; trouver sur la demi-circonférence un point C tel que les cordes joignant aux points A et B la somme

$m\,AC + n\,CB = 2S$ soit maximum

Solution.

Soit $OC = R$; $KO = CK = KA = x$; $OK = CR = BR = y$.

Il faut rendre maximum $m\,AC + n\,BC = 2S$.

ou $2mx + 2ny = 2S$ ou $mx + ny = S$ (1)

Nous avons $\overline{CK}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OK}^2$ ou $y^2 = R^2 - x^2$ ou $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Portant dans (1) cette valeur de y il vient :

$$mx + n\sqrt{R^2 - x^2} = S$$

ou $n\sqrt{R^2 - x^2} = S - mx$.

Élevant au carré les deux membres on a

$$n^2R^2 - n^2x^2 = S^2 + m^2x^2 - 2Smx$$

d'où $x^2(m^2 + n^2) - 2Smx - n^2R^2 + S^2 = 0$

$$x = \frac{Sm \pm \sqrt{S^2m^2 + n^2R^2(m^2+n^2) - S^2(m^2+n^2)}}{m^2+n^2} = \frac{Sm \pm \sqrt{n^4R^2 + m^2n^2R^2 - S^2n^2}}{n^2+m^2}$$

Condition de possibilité $n^4R^2 + m^2n^2R^2 - S^2n^2 > 0$

ou $n^2R^2 + m^2R^2 - S^2 > 0$ ou $S^2 < R^2(m^2 + n^2)$

Le maximum de S^2 est donc $R^2(m^2 + n^2)$

Alors $2S = 2R\sqrt{m^2 + n^2}$

$$x = \frac{Rm}{\sqrt{m^2+n^2}} \; ; \; y = \frac{Rn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Étant donné un triangle équilatéral ABC dont le côté est 2a et le point D milieu de la base BC, à quelle distance x de cette base faut-il mener une parallèle à EF pour que le périmètre du triangle DEF soit minimum ?

Solution.

Soit $AB = BC = AC = 2a$; $BD = h$; $AD = DC = a$; $EK = KF = \frac{EF}{2} = y$.

$EK = KF = y$; $KD = EM = x$; $ED = FD = z$.

Nous avons $\frac{EM}{BD} = \frac{AM}{AD}$ ou $\frac{x}{h} = \frac{a-y}{a}$. D'où $y = \frac{a(h-x)}{h}$ (1).

Nous avons à rendre minimum $2y + 2z$ ou $y + z$.

Posons $y + z = p$. Remplaçant y par sa valeur (1)

$$\frac{a(h-x)}{h} + z = p \quad (3)$$

Nous avons aussi $z^2 = y^2 + x^2 = \frac{a^2(h-x)^2}{h^2} + x^2$ d'où $z = \sqrt{\frac{a^2(h-x)^2}{h^2} + x^2}$.

D'où $\frac{a(h-x)}{h} + \sqrt{\frac{a^2(h-x)^2}{h^2} + x^2} = p$.

Élevant au carré et faisant les réductions (élevant au carré après avoir passé $\frac{a(h-x)}{h}$ dans le second membre)

$$x^2h + 2pah - 2pax - p^2h = 0$$

$$x = \frac{pa \pm \sqrt{p^2a^2 - 2pah^2 + p^2h^2}}{h}$$

Condition de possibilité $p^2a^2 + p^2h^2 > 2pah^2$ ou $p(a^2+h^2) > 2ah^2$.

Minimum de $p = \frac{2ah^2}{(a^2+h^2)}$; Nous savons que $h^2 = 3a^2$ d'où

$p = \frac{2a \times 3a^2}{4a^2} = \frac{6a^3}{4a^2} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$.

Valeur correspondante de x est $x = \frac{pa}{h} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

La somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère est double de la somme des carrés des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés.

Solution.

Soit $ABCD$ le quadrilatère, BD, AC ses diagonales FH, EG les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés, tirons les lignes EF, FG, GH, HE. La figure $EFGH$ est un parallélogramme. On a :

$$\overline{FH}^2+\overline{EG}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{EH}^2+\overline{HG}^2$$

ou $\overline{FH}^2+\overline{EG}^2=2\overline{EF}^2+2\overline{FG}^2$, car, nous savons par la Géométrie que dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés opposés. Mais, dans le triangle CBD puisque $BF=FC$ et que $CG=DG$ il s'ensuit que $FG=\frac{BD}{2}$ d'où $\overline{FG}^2=\frac{\overline{BD}^2}{4}$.

de même $EF=\frac{AC}{2}$; $\overline{EF}^2=\frac{\overline{AC}^2}{4}$.

D'où $\overline{FH}^2+\overline{EG}^2=\frac{2\overline{BD}^2}{4}+\frac{2\overline{AC}^2}{4}$

D'où $\overline{FH}^2+\overline{EG}^2=\frac{\overline{BD}^2+\overline{AC}^2}{2}$

D'où $2(\overline{FH}^2+\overline{EG}^2)=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2$.

C. Q. F. D.

Etant donné deux points A et B
d... AA' = 2a, BB' = 2b et la
le point M de xy pour lequel

Soit AA' = 2a ; BB' = 2b ; A'C

La quantité à rendre minimum

Le triangle rectangle AMA'

$MA = \sqrt{4a^2+(d-a)^2}$. Le triangle

La quantité à rendre minimum

Elevant au carré cette seconde

$4a^2+d^2-2dx+x^2+4b^2+d^2+2dx$

$2a^2+2b^2+d^2+x^2+\sqrt{4a^2}$

$x^2(f^2-d^2)-2dx(a^2-b^2)-f^4$

$x = \dfrac{d(a^2-b^2) \pm \sqrt{a^4d^2-2b^2a^2d^2+d^2b^4+f^6-f^4d^2}}{}$

Le minimum ... radical

$f^4(d^2+a^2+b^2)f^2+$

$f^2 = (d^2+a^2+b^2) \pm \sqrt{d^4}$

D'où $f^2 = (d^2+a^2+b^2) \pm \sqrt{4a^2b^2}$. La

valeur correspondante de

$x = \dfrac{d(a^2-b^2)}{a^2+b^2-a^2d^2} = \dfrac{d(a^2-b^2)}{(a+b)^2} =$

d'un même côté d'une droite xy leurs distances AA', BB' a et b distance $A'B'$ des pieds des perpendiculaires AA' et BB' = $2d$. trouver $AM + BM = 2l$. calculer le minimum.

Solution

$= OB' = d$, $MO = x$.

$AM + BM = 2l$ (1)

nous donne l'égalité :

rectangle BMB' nous donne à son tour : $BM = \sqrt{4b^2+(d+x)^2}$.

donc $\sqrt{4a^2+(d-x)^2} + \sqrt{4b^2+(d+x)^2} = 2l$. (2)

équation on obtient la nouvelle équation.

$+x^2 + 2\sqrt{4a^2+(d-x)^2}\sqrt{4b^2+(d+x)^2} = 4l^2$ d'où

$(d-x)^2\sqrt{4b^2(d+x)^2} = 2l^2$. Elevant au carré on obtient :

$-2a^2l^2 + 2b^2l^2 + l^2d^2 - a^4 - b^4 + 2b^2a^2 = 0$ d'où nous tirons

$2a^2l^4 + 2a^2l^2d^2 - 2b^2l^4 + 2b^2l^2d^2 - l^4d^2 + l^2d^4 + a^4l^2 - a^4d^2 - b^4l^2 - b^4d^2 - 2b^2a^2l^2 + 2b^2a^2d^2$

$l^2 - d^2$

minimum on a alors cette équation.

$2a^2d^2 + 2b^2d^2 + d^4 + a^4 + b^4 - 2b^2a^2 = 0$ d'où nous tirons

$d^4 + l^4 + 2d^2b^2 + 2a^2d^2 + 2a^2b^2 - 2a^4d^2 - 2b^4d^2 - d^4a^4 - b^4 + 2a^2l^2$

minimum de l^2 est $l^2 = d^2 + a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 + d^2$. $l = \sqrt{(a+b)^2+d^2}$.

x est

$\frac{d(a+b)(a-b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{d(a-b)}{a+b}$.

Partager une somme a en trois parties x, y, z, telles que la première soit double de la seconde et que le produit xyz soit maximum.

Solution.

Soit à trouver le maximum du produit xyz sachant que $x+y+z=a$ et que $x=2y$. On a

$$\begin{cases} x+y+z=a & (1) \\ x=2y & (2) \\ xyz=P & (3) \end{cases}$$

De (2) nous tirons $y=\frac{x}{2}$. Portant dans (3) il vient:

$$\frac{xxz}{2}=P. \text{ D'où } 2P=x^2z; \text{ d'où } z=\frac{2P}{x^2}.$$

Substituant dans (1) les valeurs de y et de z on a

$$x+\frac{x}{2}+\frac{2P}{x^2}=a. \text{ D'où } 2x^3+x^3+4P=2x^2a$$

D'où $3x^3-2x^2a+4P$.

Nous effectuons avec la division

$3x^3$	$-2a\,x^2$	x	$+4P$	$x^2-2\alpha x+\alpha^2$
	$+6\alpha$	$-4ax$ $+12\alpha^2$ $-3\alpha^2$	$-2\alpha^2 a$ $-6\alpha^3$	$3x+6\alpha$ $-2a$

Comme le reste doit être nul on doit avoir

$9\alpha^2=4a\alpha$; ou $9\alpha=4a$; d'où $\alpha=\frac{4a}{9}$; $y=\frac{2a}{9}$; $z=\frac{a}{3}$

Dans un cône donné de hauteur h inscrire le plus grand cylindre possible

Solution.

Soit ABC le cône ; soit $OC = OB = R$; $AO = h$.

Soit $DEFG$ le cylindre dans lequel $EG = DF = y$.

$OF = OG = x$. On a

$V = \pi x^2 y$ quantité à rendre maximum

chassant le facteur constant π il vient.

$$V = x^2 y.$$

Les triangles semblables AOC, EGC nous donnent :

$$\frac{AO}{EG} = \frac{OC}{GC} \text{ ou } \frac{h}{y} = \frac{R}{R-x} ;\ x = \frac{R(h-y)}{h}$$

La quantité à rendre maximum est donc :

$$\frac{R^2(h-y)^2 y}{h^2}.$$

faisant abstraction du facteur constant $\frac{R^2}{h^2}$

la quantité devient

$(h-y)^2 y$. Ce produit sera maximum

quand les facteurs seront proportionnels à leurs exposants c'est-à-dire quand

$$\frac{h-y}{2} = y \text{ ; ou } h = 3y ;\ y = \frac{h}{3}$$

$$x = \frac{R\left(h - \frac{h}{3}\right)}{h} = \frac{R \times 2h}{3h} = \frac{2R}{3}.$$

Chacune des bases d'un Cylindre droit est terminée par une hémisphère. On donne la surface $2\pi\rho^2$ du solide. Quels doivent être le rayon x du cylindre et sa hauteur y pour que le volume soit maximum.

Solution

Soit $OB = x$; $BD = y$. On a

$$2\pi xy + 4\pi x^2 = 2\pi\rho^2 \text{ ou } xy + 2x^2 = \rho^2 \ (1)$$

On a ensuite faisant abstraction du facteur constant π

$$\frac{4x^3}{3} + x^2y = V \text{ ou } 4x^3 + 3x^2y - 3V = 0. \ (2)$$

De (1) nous tirons $y = \dfrac{\rho^2 - 2x^2}{x}$.

Substituant dans (2) il vient

$$4x^3 + 3x(\rho^2 - 2x^2) - 3V = 0 \text{ ou } 4x^3 + 3x\rho^2 - 6x^3 - 3V = 0$$

Nous effectuerons donc la division

$2x^3$	x^2	$-3\rho^2$	x	$+3V$	$x^2 - 2ax + a^2$
$+4a$		$-2a^2$		$-4a^3$	$2x + 4a$
		$+8a^2$			

Comme le reste doit être nul nous avons

$$6a^2 = 3\rho^2;\ \text{d'où } 2a^2 = \rho^2;\ \text{d'où } a = x = \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}.$$

$y = 0$

On a aussi $4a^3 = 3V$; d'où $\dfrac{4\rho^3\sqrt{(2)}^3}{8} = 3V$.

$\dfrac{\rho^2\,2\rho\sqrt{2}}{2} = 3V$. $\rho^3\sqrt{2} = 3V$; $V = \dfrac{\rho^3\sqrt{2}}{3}$

A | x | B
C
y
D

On donne deux parallèles AB, CD dont la distance est b. Et sur ces lignes deux points fixes M, N. On prend sur AB à partir du point M une distance ME égale à une longueur donnée a. Quel point I faut-il joindre au point E pour que la somme des surfaces des triangles MEI, NPI soit un minimum?

Solution

Soit GK = b; ME = a; PN = y; IG = x; IK = b − x.

La quantité à rendre minimum est

$$\frac{ax}{2} + \frac{y(b-x)}{2} = S \quad (1)$$

Mais $\frac{a}{y} = \frac{x}{b-x}$; d'où $y = \frac{a(b-x)}{x}$

Et l'équation (1) devient réductions faites

$$ax^2 + ab^2 - 2abx + ax^2 - 2Sx = 0$$

ou $2ax^2 - 2x(ab+S) + ab^2 = 0.$

D'où $x = \frac{ab+S \pm \sqrt{a^2b^2+S^2+2abS-2a^2b^2}}{2a}$

$$x = \frac{ab+S \pm \sqrt{S^2+2abS-a^2b^2}}{2a}$$

Pour que la solution soit possible il faut qu'on ait

$S^2+2abS > a^2b^2$. Le minimum a lieu quand le radical est nul quand $S^2+2abS-a^2b^2=0$

d'où $S = -ab \pm \sqrt{2a^2b^2} = ab(-1+\sqrt{2}) =$ minimum

$$x = \frac{ab+ab\sqrt{2}-ab}{2a} = \frac{ab\sqrt{2}}{2a} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{a\left(b-\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\left(\frac{2b-b\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}$$

Étant donné un rectangle ABCD, dans lequel AB = a, AD = b, mener par le sommet A une sécante AEF telle que la somme BE + DF soit minimum.

Solution.

Soit BE = x ; AD = BC = b ; AB = DC = a ; FC = y, DF = a + y ...

La quantité à rendre minimum est

$$x + a + y.$$

Déterminons y. Les triangles semblables FEC, FAD donnent

$$\frac{AD}{EC} = \frac{FD}{FC} \text{ ou } \frac{b}{b-x} = \frac{a+y}{y} \text{ d'où } y = \frac{a(b-x)}{x}.$$

La quantité à rendre minimum devient donc

$$x + a + \frac{a(b-x)}{x}.$$

L'égalant à une quantité m on a

$$x + a + \frac{a(b-x)}{x} = m \text{ ; d'où } x^2 + ax - ax + ab = xm$$

$$\text{d'où } x^2 - xm + ab = 0$$

$$\text{D'où } x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4ab}}{2}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles il faut qu'on ait

$$m^2 > 4ab \text{ ou } m > 2\sqrt{ab}.$$

Le minimum de m est donc $2\sqrt{ab}$.

$$\text{Alors } x = \frac{m}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}.$$

$$y = \frac{a(b - \sqrt{ab})}{\sqrt{ab}}$$

Soit [illegible] le contenu d'un tonneau [illegible] par la [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ayant cette même diagonale [illegible] [illegible]

Solution.

Soit CD = D ; [illegible] CK = d.

La quantité [illegible] maximum est $\frac{\pi D^2 \cdot 2l}{4}$ ou [illegible] (1).

Nous avons $\overline{CD}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KD}^2$ ou $D^2 = d^2 - l^2$.

Portant dans cette valeur [illegible]

$(d^2 - l^2) l$ [illegible] maximum

$l(d+l)(d-l)$

Multiplions [illegible] x, y, z

$x l, \; y(d+l), \; z(d-l)$

Le maximum aura lieu quand

$\frac{1}{l} = \frac{1}{d+l} = \frac{1}{d-l}$ [illegible]

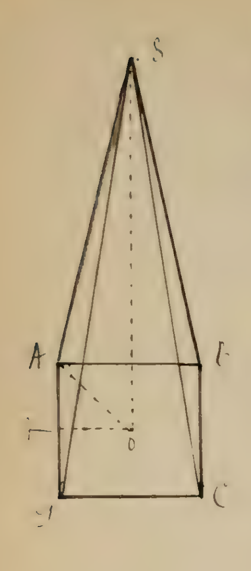
$d^2 - 3l^2 = 0$; $l^2 = \frac{d^2}{3}$; $l = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ (demi-longueur du tonneau)

On a ensuite pour calculer CD ou D

$D^2 = d^2 - l^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3}$; $D = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}$

Le volume maximum est $\frac{\pi D^2 \times 2l}{4}$

$= \frac{\pi d^2 \times 6}{4 \times 9} \times \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{9}$



De toutes les pyramides régulières [illegible] ayant [illegible] déterminer celle dont le volume est maximum; calculer en fonction de l [illegible] c [illegible] cette pyramide.

Solution.

Soit $SA = l$, $AB = c$; $SO = h$; $KO = \frac{c}{2}$.

[illegible] $\frac{h}{3}$ [illegible] c^2 [illegible]

On a $\overline{AO}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{SO}^2 = l^2 - h^2$. Mais $\overline{AO}^2 = \frac{c^2}{2}$.

D'où $\frac{c^2}{2} = l^2 - h^2$ ou $c^2 = 2(l^2 - h^2)$

L'équation devient [illegible] $h(l^2-h^2)$ [illegible]

[illegible]

Multipliant par [illegible]

[illegible]

Le maximum aura lieu quand

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{l+h} - \frac{1}{l-h} = 0$$

D'où $l^2 = 3h^2$; où $h = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.

$c^2 = 2(l^2 - h^2) = 2\left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right) = \frac{4 \times 2 l^2}{3} = \frac{4l^2}{3}$

D'où $c = \sqrt{\frac{4l^2}{3}} = \frac{2l}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$.

L'on voit que de toutes les pyramides régulières [illegible] celle qui a le plus grand volume est celle dont le côté de la base est [illegible]

Étant donné deux cercles concentriques dont les rayons sont R et r, on se propose d'inscrire entre ces deux cercles un rectangle ABCD de surface m². L'une des dimensions du rectangle doit être parallèle au diamètre FF', tandis que les côtés perpendiculaires AB, DC sont deux cordes, l'un du petit cercle, l'autre du grand. Maximum [illegible].

Solution

[illegible] AI [illegible] x ; AB = y [illegible] maximum [illegible]

on $xy = m^2$

$y = AK + KB$; $AK = \sqrt{r^2 - x^2}$; $KB = \sqrt{R^2 - x^2}$; $y = \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}$

[illegible] $x\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}\right) = m^2$

[illegible]

$$2x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,\sqrt{r^2 - x^2} = m^2 - R^2x^2 - r^2x^2 + 2x^4$$

Élevant de nouveau au carré on a

$$x^4(4m^4 + R^4 + r^4 - 2r^2R^2) - 2x^2m^4(R^2 + r^2) + m^8 = 0$$

D'où $x^2 = \dfrac{m^4(R^2 + r^2) \pm \sqrt{R^4m^8 + 2R^2r^2m^8 + m^8r^4 - 4m^{12} - R^4m^8 - r^4m^8 + 2R^2r^2m^8}}{(4m^4 + R^4 + r^4 - 2r^2R^2)}$

Le radical se réduit à $4R^2r^2m^8 - 4m^{12}$

Condition de possibilité $4m^{12} < 4R^2r^2m^8$; ou $m^2 < Rr$

Le maximum de m^2 est donc $Rr \times 2$ ou $2Rr$.

Le radical se détruisant la valeur de x est

$$x^2 = \frac{Rr(R^2 + r^2)}{4R^2r^2 + R^4 + r^4 - 2r^2R^2} = \frac{R^2r^2(R^2 + r^2)}{R^4 + r^4 + 2R^2r^2} = \frac{R^2r^2(R^2 + r^2)}{(R^2 + r^2)^2}$$

$$= \frac{R^2r^2}{R^2 + r^2}.\ \text{D'où}$$

$$x = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{Rr\sqrt{R^2 + r^2}}{R^2 + r^2}$$

Chercher le maximum de $x^m(a-bx^n)$ [illegible] constants.

Solution

Élevant les deux facteurs à la puissance n, la quantité à rendre maximum devient

$$x^{mn}(a-bx^n)^n.$$ Puisque [illegible] est constant multiplions les deux facteurs par b^m; le produit devient

$$b^m x^{mn}(a-bx^n)^n$$

$$(bx^n)^m (a-bx^n)^n$$

La somme des facteurs bx^n; $a-bx^n$ est constante car $bx^n+a-bx^n=a$ qui est constant. Le maximum aura donc lieu quand

$$\frac{bx^n}{m}=\frac{a-bx^n}{n}$$

D'où $nbx^n=ma-bmx^n$

ou $x^n b(m+n)=ma$; D'où

$$x^n=\frac{ma}{b(m+n)} \quad x=\sqrt[n]{\frac{ma}{m+n}}$$

Le maximum du produit est

$$\frac{an}{m+n}\sqrt[n]{\left(\frac{am}{b(m+n)}\right)^m}$$

On donne un point A situé à une distance AB = d d'une droite xy et une droite CD de longueur 2a qui se meut sur xy. Quelle doit être sa position pour que le périmètre du triangle ACD soit minimum (soit AC + AD = 2p)

Solution

Soit $AB = d$; $CD = 2a$; $BO = x$; $BC = x-a$; $BD = x+a$.

La quantité à rendre minimum est $AC + AD = 2p$.

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{d^2+(x-a)^2}$$

$$AD = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2} = \sqrt{d^2+(x+a)^2}$$

D'où $\sqrt{d^2+(x-a)^2} + \sqrt{d^2+(x+a)^2} = 2p$.

Élevant au carré, on a

$$\sqrt{d^2+(x-a)^2}\sqrt{d^2+(x+a)^2} = 2p^2 - d^2 - a^2 - x^2.$$

Élevant de nouveau au carré, il vient

$$x^2(p^2-a^2) + p^2d^2 + p^2a^2 - p^4 = 0$$

D'où $x^2 = \dfrac{p^4 - p^2a^2 - p^2d^2}{p^2-a^2} = p^2 - \dfrac{p^2d^2}{p^2-a^2}$.

Pour que la valeur de x^2 soit admissible il faut qu'on ait

$$p^4 - p^2a^2 - p^2d^2 > 0; \text{ ou } p^2 > a^2 + d^2.$$

Le minimum de p^2 est donc a^2+d^2.

La valeur de x correspondant à ce minimum est:

$$x^2 = \frac{p^4-p^2a^2-p^2d^2}{p^2-a^2} = \frac{0}{p^2-a^2} = 0.$$

Alors le triangle est isocèle.

On circonscrit à un hémisphère un [illegible] [illegible] cône [illegible] la base [illegible] plan [illegible] [illegible] [illegible] sphérique [illegible] le cône de volume minimum.

Solution.

Soit ABC le cône ; $AO = x$; $OC = y$; $OK = R$, $KA = z$.

La quantité [illegible] du minimum est $\frac{\pi x y^2}{3}$ [illegible] $y^2 x$ [illegible]

[illegible] $\frac{z}{x} = \frac{y}{R}$. mais $z = \sqrt{x^2 - R^2}$ d'où $\frac{x}{\sqrt{x^2-R^2}} = \frac{y}{R}$.

D'où $y = \frac{xR}{\sqrt{x^2-R^2}}$; $y^2 = \frac{R^2x^2}{x^2-R^2}$.

Portant dans cette valeur de y^2 [illegible] [illegible]

$\frac{R^2x^3}{x^2-R^2} = m$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\frac{x^3}{x^2-R^2} = m$$

Nous avons l'équation $x^3 - m(x^2 - R^2) = 0$

Nous effectuerons donc la division

x^3	$-m \mid x^2$	x	$+mR^2$	$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$
	$+2\alpha$	$-\alpha^2$ $-2\alpha m$ $+4\alpha^2$	$-m\alpha^2$ $-2\alpha^3$	$x - m$ $+2\alpha$

Comme le reste doit être nul [illegible] [illegible] $x^2 - 2\alpha x$ [illegible]

d'où $m = \frac{3\alpha}{2}$. Nous avons aussi $mR^2 - m\alpha^2 - 2\alpha^3 = 0$

Remplaçant m par sa valeur il vient

$3\alpha R^2 + 3\alpha^3 - 4\alpha^3 = 0$; d'où $\alpha^2 = 3R^2$; d'où $a = x = R\sqrt{3}$

$y = \frac{R\sqrt{6}}{2}$

De tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle, quel est celui qui a le plus grand périmètre ? [illegible] [illegible]

Solution.

Soit $AC = AB = 2x$; $AK = KC = x$; $BC = BL = y$; $OK = z$, $OA = R$.

La quantité à rendre maximum est $4x + 2y = 2p$ ou $2x + y = p$ (1).

Nous avons $\frac{OA}{AC} = \frac{OK}{BC}$; $\frac{R}{2x} = \frac{z}{y}$.

Mais nous avons aussi $z = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où $\frac{R}{2x} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{y}$ [illegible]

Portant dans cette relation [illegible], il vient une équation.

$$4x^4 - 4pR^2x + R^2p^2 = 0.$$

Nous effectuerons donc la division suivante

$4x^4$ [illegible]	[illegible]	[illegible] $4pR^2$	[illegible] p^2R^2	[illegible]
$+4x$	$-4x^2$	$-8x^3$	$+4x^4$	$4x^3 + 8x^2$ [illegible]
		$-8x^3$		
	$+8x^2$	$+24x^3$	$-16x^4$	$-4x^2 + 4x^2$ [illegible]
		$16x^3 - 4pR^2$	$p^2R^2 - 12x^4$	

Comme le reste doit être nul, on a les équations.

$16x^3 - 4pR^2 = 0$, ou $4x^3 - pR^2 = 0$ ou $4x^3 = pR^2$ (1)

$-12x^4 + p^2R^2 = 0$; ou $12x^4 - p^2R^2 = 0$; ou $12x^4 = p^2R^2$ (2)

Si l'on remplace p par $\frac{4x^3}{R^2}$ [illegible]

$12x^4 = \frac{16x^6 R^2}{R^4} = \frac{16x^6}{R^2}$. D'où $3R^2 = 4x^2$; d'où $x^2 = \frac{3R^2}{4}$

d'où $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ donc $2x = AB = R\sqrt{3}$ et le triangle est équilatéral.

Partager 12 en 3 parties telles que deux d'entre elles diffèrent de 1 et que leur produit soit maximum.

Solution.

On a $x+y+z=12=a$; $x-y=1=b$; $xyz=m$

D'où $x+x-b+z=12=a$ d'où $2x-b+z=a$ (1)

$xyz=m$, $y=x-b$; $x(x-b)z=m$; $z=\frac{m}{x(x-b)}$

Portant dans (1) cette valeur de z et réduisant on trouve

$$2x^3-15x^2+13x+m=0$$

Nous effectuerons la division suivante :

$2x^3$	$-15 \mid x^2$	$+13 \mid x$	$+m$	$x^2-2\alpha x+\alpha^2$
	$+4\alpha$	-30α	$+15\alpha^2$	
		$+6\alpha^2$	$-4\alpha^3$	

Comme le reste doit être nul on aura

$$6\alpha^2-30\alpha+13=0$$

D'où $\alpha=x=\frac{15\pm\sqrt{225-78}}{6}=\frac{15\pm\sqrt{147}}{6}=\frac{15\pm 12,1}{6}$

Prenant la racine positive on obtient

$\alpha=x=\frac{27,1}{6}=4,521$

$y=x-1=3,521$

$z=12-(4,521+3,521)=3,958$

$xyz=m$ maximum $=4,521\times 3,521\times 3,958=63$ [illegible]

On donne deux parallèles XY, X'Y' [illegible] AB [illegible] sur AB on marque un point fixe M tel que AM = a, BM = b. On demande [illegible] position du point M [illegible] position [illegible] [illegible] le point M pour que la surface du triangle MCD soit minimum

Solution

Soit AC = x; AM = a; BD = y; BM = b.

[illegible] minimum est $\frac{MC \times MD}{2}$ ou $MC \times MD$.

Nous avons $MC = \sqrt{a^2+x^2}$; et $MD = \sqrt{b^2+y^2}$

La surface devient en l'égalant à m

$(a^2+x^2)(b^2+y^2) = 4m^2$ [illegible] (1)

Mais on a $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$; d'où $y = \frac{bx}{a}$; $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$.

Portant dans (1) cette valeur de y^2, on a

$(a^2+x^2)\left(b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}\right) = 4m^2$; ou $(a^2+x^2)^2 b^2 = 4m^2a^2$.

D'où $x^4b^2 + 2a^2x^2b^2 - 4m^2a^2 + a^4b^2 = 0$.

D'où $x^2 = -a^2b^2 \pm \sqrt{a^4b^4 - a^6b^4 + 4m^2a^6b^2}$ [illegible]

Condition de possibilité $4m^2a^6b^2 + a^4b^4 > a^6b^4$

ou $4m^2a^2 + b^2 > a^2b^2$; ou $4m^2a^2 > b^2(a^2-1)$

Le minimum de m^2 est donc $\frac{b^2(a^2-1)}{4a^2} = \frac{b^2(a+1)(a-1)}{4a^2}$

[illegible]

correspondant à ce minimum est

$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2$. D'où $x = a$

De tous les trapèzes isocèles inscrits dans un demi-cercle trouver celui qui a la plus grande surface.

Solution

Soit ABCD le trapèze isocèle inscrit dans le demi-cercle O, dans lequel $AD = 2R$; $KC = BK = x$ $KO = y$.

La surface est $\frac{2R+2x}{2} \cdot y = (R+x)y$. (1)

Le triangle rectangle KOC nous donne

$\overline{KO}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{KC}^2$; d'où $y^2 = R^2 - x^2$; $y = \sqrt{R^2-x^2}$

Portant dans (1) l'aire devient

$$(R+x)\sqrt{R^2-x^2}$$

Élevant au carré on a

$$(R+x)^2(R^2-x^2), \text{ ou } (R+x)^3(R-x)$$

Comme la somme des facteurs est constante et égale à 2R le maximum aura lieu quand les facteurs seront proportionnels à leurs exposants respectifs, c'est-à-dire quand

$$\frac{R+x}{3} = R-x;\ R+x = 3R-3x;\ 4x = 2R;\ x = \frac{R}{2}.$$

$$y^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4},\quad y = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = (R+x)y = \left(R + \frac{R}{2}\right)\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}, \text{ le}$$

trapèze isocèle est un demi-hexagone régulier.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients du polynôme :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$$

pour qu'on puisse le décomposer en deux facteurs du premier degré en x et y.

Solution.

Il faut pour cela que le polynôme donne une équation du 2 degré.

D'où $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$

$$cx^2 + x(by + e) + y(ay + d) + f = 0$$

D'où $x = \frac{-(by+e) \pm \sqrt{b^2y^2 + e^2 + 2bye - 4cay^2 - 4cdy - 4cf}}{2c}$

Ordonnant, égalant à 0 le polynôme placé sous le radical on a

$$y^2(b^2 - 4ac) + 2y(be - 2cd) + e^2 - 4cf = 0$$

$$y = \frac{-(be - 2cd) \pm \sqrt{b^2e^2 - 4cdbe + 4c^2d^2 + 4ace^2 - (e^2 - 4cf)(b^2 - 4ac)}}{b^2 - 4ac}$$

Égalant encore à 0 le polynôme placé sous le radical on a

$$-4bced + 4ace^2 + 4c^2d^2 + 4cfb^2 - 16ac^2f = 0$$

D'où en divisant les deux membres de cette équation par $4c$ il vient

$$-bed + ae^2 + cd^2 + f(b^2 - 4ac) = 0.$$

D'où transposant

$$ae^2 + cd^2 + fb^2 = 4acf + bed.$$

Telle est la relation demandée.

Démontrer que l'équation

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = 3$$

a toujours ses racines réelles quels que soient a et b.

Solution.

Réduisant cette équation au même dénominateur elle devient après réduction

$$x^2 - 2x(a+b) + 3ab = 0. \quad (1).$$

D'où $x = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+2ab-3ab}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{2}$.

Pour que les racines soient réelles il faut que la quantité sous le radical soit nulle ou plus grande que zéro. Je dis qu'elle est plus grande que zéro. c'est-à-dire que $a^2+b^2-ab > 0$; ou $a^2+b^2 > ab$.

Ceci est vrai car nous avons vu que $a^2+b^2 > 2ab$ ou $(a-b)^2 > 0$. Donc $a^2+b^2 > ab$ ou $a^2+b^2-ab > 0$ donc les racines sont réelles

Si maintenant nous changeons a en $-a$ et b en $-b$ l'équation (1) devient

$$x^2 + 2x(a+b) + 3ab = 0$$

$$x = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{2}$$

Or il a été démontré que $a^2+b^2 > ab$.

Étant donné un triangle rectangle ABC [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] un triangle ADE [illegible] la $m^{ème}$ partie du premier. Comment [illegible] la ligne DE pour que sa longueur soit minimum.

Solution.

Soit $AB = c$; $AC = b$; [illegible] $AD = y$ [illegible] [illegible] quantité [illegible] minimum est $K = \sqrt{x^2+y^2}$ K égalant DE.

[illegible] [illegible] $K^2 = x^2 + y^2$ (1).

Nous avons par hypothèse $xy = \frac{bc}{m}$ (2).

Ajoutant (1) au double de (2) on a

$(x+y)^2 = K^2 + \frac{2bc}{m}$; $x+y = \pm\sqrt{K^2 + \frac{2bc}{m}}$ (3)

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$X^2 - \left(\sqrt{K^2+\frac{2bc}{m}}\right)X + \frac{bc}{m} = 0$ Les deux racines [illegible]

$X = $ [illegible] $= \sqrt{K^2+\frac{2bc}{m}} \pm \sqrt{K^2 - \frac{2bc}{m}}$ [illegible]

Pour que le problème soit possible [illegible]

$K^2 > \frac{2bc}{m}$. Le minimum de K^2 est donc

$\frac{2bc}{m}$. Alors $K = \sqrt{\frac{2bc}{m}}$.

[illegible] [illegible] [illegible] x et y.

Si dans l'équation (3) nous remplaçons K par sa valeur minimum on a

$x + y = \sqrt{\frac{2bc}{m} + \frac{2bc}{m}} = \sqrt{\frac{4bc}{m}} = 2\sqrt{\frac{bc}{m}}$; $x = y =$ [illegible] $\frac{bc}{m}$.

Démontrer que les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

sont toujours rationnelles quand $b = am + \frac{c}{m}$, a, c, m étant d'ailleurs des quantités rationnelles.

Solution

Remplaçant dans l'équation b par sa valeur, cette équation peut s'écrire

$$ax^2 + x\left(am + \frac{c}{m}\right) + c = 0.$$

Réduisant au même dénominateur, il vient :

$$amx^2 + x(am^2+c) + cm = 0.$$

D'où $x = \dfrac{-(am^2+c) \pm \sqrt{a^2m^4 + c^2 + 2am^2c - 4am^2c}}{2am}$

ou $x = \dfrac{-(am^2+c) \pm \sqrt{a^2m^4 + c^2 - 2am^2c}}{2am}$

La quantité soumise au radical est $(am^2-c)^2$.

Elle est donc un carré parfait ; par suite la valeur de x devient :

$$x = \frac{-(am^2+c) \pm (am^2-c)}{2am}$$

Les deux racines sont donc toutes deux rationnelles puisqu'elles ne contiennent pas de radical ni au numérateur, ni au dénominateur.

$$x' = \frac{-(am^2+c)+(am^2-c)}{2am} = \frac{-am^2-c+am^2-c}{2am} = \frac{-2c}{2am} = -\frac{c}{am}$$

$$x'' = \frac{-(am^2+c)-(am^2-c)}{2am} = \frac{-am^2-c-am^2+c}{2am} = \frac{-2am^2}{2am} = -m$$

Faire voir que les racines de l'équation

$$x^2+\left(B+\frac{C}{B}\right)x+C=0$$

sont rationnelles.

Solution.

Réduisant tous les termes au même dénominateur, cette équation peut s'écrire

$$Bx^2+(B^2+C)x+BC=0.$$

De là on tire

$$x=\frac{-(B^2+C)\pm\sqrt{B^4+C^2+2B^2C-4B^2C}}{2B}$$

Simplifiant le radical il vient

$$x=\frac{-(B^2+C)\pm\sqrt{B^4+C^2-2B^2C}}{2B}$$

La quantité soumise au radical est un carré parfait puisqu'elle est égale à $(B^2-C)^2$.

Par suite en extrayant la racine carrée du radical, on a

$$x=\frac{-(B^2+C)\pm(B^2-C)}{2B}$$

Comme les racines ne renferment pas de radical ni au numérateur ni au dénominateur elles sont rationnelles.

$$x'=\frac{-(B^2+C)+(B^2-C)}{2B}=\frac{-B^2-C+B^2-C}{2B}=\frac{-2C}{2B}=-\frac{C}{B}$$

$$x''=\frac{-(B^2+C)-(B^2-C)}{2B}=\frac{-B^2-C-B^2+C}{2B}=\frac{-2B^2}{2B}=-B.$$

Trouver une équation du second degré dont les racines surpassent de h les racines d'une équation connue $ax^2+bx+c=0$

Solution.

On aura $x''' = x'+h$; $x'''' = x''+h$.

x''', x'''' désignant les deux racines de l'équation inconnue. En désignant par S leur somme, par P leur produit on aura :

$$S = x'+x''+2h = -\left(\frac{b-2ah}{a}\right).$$

$$P = (x'+h)(x''+h) = x'x''+hx'+hx''+h^2 = x'x''+h(x'+x'')+h^2$$

Mais $x'x'' = \frac{c}{a}$; $x'+x'' = -\frac{b}{a}$

d'où $P = \frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)h+h^2 = \frac{c}{a}-\frac{bh}{a}+h^2$.

Connaissant la somme S et le produit P les deux racines x''', x'''' sont racines de l'équation suivante

$$X^2 + X\left(\frac{b-2ah}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{bh}{a}+h^2\right)=0$$

et si l'on réduit au même dénominateur

$$X^2a + X(b-2ah)+(c-bh+h^2a)=0$$

Telle est l'équation demandée.

Montrez que si les racines de l'équation

$$(a^2+b^2)x^2 - 2acx + c^2 - b^2 = 0$$

sont réelles elles sont toutes deux plus petites que l'unité.

Solution.

Résolvant cette équation par rapport à x, on a

$$x = \frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2+b^2a^2+b^4-c^2a^2-b^2c^2}}{a^2+b^2}$$

ou $x = \frac{ac \pm \sqrt{b^2a^2+b^4-b^2c^2}}{a^2+b^2}$

Puisque les racines sont réelles on a

$$b^4+b^2a^2-b^2c^2 > 0$$

ou $b^2+a^2-c^2 > 0$ ou

$a^2+b^2 > c^2$; ou $\sqrt{a^2+b^2} > c$.

Soit à prouver qu'elles seront plus petites que 1.

on doit avoir

$$ac < a^2+b^2 \text{ ; ou } a^2+b^2 > ac$$

Remplaçons c par une quantité plus grande $\sqrt{a^2+b^2}$.

on aura tout de même $a^2+b^2 > a\sqrt{a^2+b^2}$.

En effet en élevant au carré on a

$a^4+b^4+2a^2b^2 > a^4+a^2b^2$: ce qui est vrai

car b^2a^2 est > 0. Donc $a^2+b^2 > a(\sqrt{a^2+b^2})$

si on remplace $\sqrt{a^2+b^2}$ par une quantité plus petite c, on a

$a^2+b^2 > ac$ ou $\frac{ac}{a^2+b^2} < 1$.

Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation $ax^2+bx+c=0$ pour que l'une des racines soit le carré de l'autre !

Solution

On a donc $x' = x''^2$

On a aussi, d'après les formules connues

$$x'+x'' = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x'x'' = \frac{c}{a} \quad (2)$$

et par hypothèse $x' = x''^2$ (3)

Remplaçant dans (2) x' par sa valeur donnée dans (3) l'équation (2) devient

$$x''^3 = \frac{c}{a}$$

D'où extrayant la racine cubique

$$x'' = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$$

Portant dans (1) cette valeur de x'' on a

$$x' + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \quad (4)$$

Mais par hypothèse

$$x' = x''^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

Portant dans (4) cette valeur de x' on a

$$\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a}$$

Quelle valeur faut-il attribuer à b dans l'équation $ax^2+bx+ad^4=0$ pour que l'une des racines soit le cube de l'autre ?

Solution.

Soit $x'=x''^3$.

On a, par les formules connues

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x'x''=\frac{ad^4}{a}=d^4 \quad (2)$$

$$x'=x''^3 \quad (3).$$

Et comme par hypothèse on a $x'=x''^3$ il vient

$$x''^4=d^4 \quad \text{ou} \quad x''=d.$$

Remplaçant dans (1) x'' par sa valeur il vient

$$x'+d=-\frac{b}{a}. \text{ D'où } x'=\frac{-b-ad}{a}.$$

Substituant ces valeurs de x' et de x'' dans l'équation (2) il vient

$$\left(\frac{-b-ad}{a}\right)d=d^4. \text{ D'où}$$

$$\frac{-b-ad}{a}=d^3$$

d'où $-b-ad=ad^3$

d'où $-ad-ad^3=b$

[illegible]

D'où $-a(d+d^3)=b$.

Quelle relation doit exister entre les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2+bx+c=0$ pour que les racines soient entre elles comme les nombres m et n !

Solution.

On a par hypothèse $\frac{x'}{x''}=\frac{m}{n}$.

D'après les formules connues nous avons

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x'x''=\frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\frac{x'}{x''}=\frac{m}{n} \quad (3) \text{ par hypothèse.}$$

De (1) nous tirons

$$x''=-\frac{b}{a}-x'=\frac{-b-ax'}{a}.$$

Portant dans (3) cette valeur de x'' on a

$\frac{x'}{\frac{-b-ax'}{a}}=\frac{m}{n}$. d'où $\frac{x'a}{-b-ax'}=\frac{m}{n}$.

D'où $x'an=-bm-ax'm$. D'où $ax'(n+m)=-mb$

D'où $x'=\frac{-mb}{a(m+n)}$.

De (1) on tire $x''=-\frac{b}{a}-x'$

Substituant à x' sa valeur on a

$$x''=\frac{-nb}{a(m+n)}$$

Portant dans (2) ces valeurs de x' et de x'' on a

$\frac{-mb}{a(m+n)}\left(\frac{-nb}{a(m+n)}\right)=\frac{c}{a}$ d'où

$mnb^2=ca(n+m)^2$; d'où $\frac{b^2}{ac}=\frac{(n+m)^2}{nm}$

Étant donné l'équation du second degré

$$x^2+px+q=0$$

trouver une seconde équation qui ait pour racines les carrés des inverses des racines de l'équation proposée.

Solution.

Les racines de l'équation cherchée seront

$$\frac{1}{x'^2} \text{ et } \frac{1}{x''^2}.$$

Leur somme est

$$\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{x'^2+x''^2}{x'^2x''^2}.$$

Mais $x'^2+x''^2=p^2-2q$

et $x'^2x''^2=q^2$.

La somme demandée est donc

$$\frac{p^2-2q}{q^2}.$$

D'autre part le produit des racines est :

$$\frac{1}{x'^2}\times\frac{1}{x''^2}=\frac{1}{x'^2x''^2}=\frac{1}{q^2}.$$

Connaissant la somme et le produit des racines on forme facilement une équation du second degré dont elles sont respectivement les racines.

Cette équation est

$$X^2-X\,\frac{p^2-2q}{q^2}+\frac{1}{q^2}=0.$$

Quatre lumières ayant même intensité sont placées aux sommets d'un carré ABCD dont le centre est O et le rayon R. Trouver sur l'apothème de ce carré le point (x) qui est éclairé avec la même intensité que si les lumières étaient réunies au centre du carré.

Solution.

Soit OM = x ; BD = C ; OB = R.

On a comme équation de condition :

$$\frac{1}{\overline{AM}^2}+\frac{1}{\overline{BM}^2}=\frac{2}{\overline{OM}^2} \quad (1)$$

en tenant compte de ce que l'effet est le même pour les lumières

Or $\overline{AM}^2 = R^2+x^2+\frac{2Cx}{2} = R^2+x^2+Cx$.

$\overline{BM}^2 = R^2+x^2-\frac{2Cx}{2} = R^2+x^2-Cx$.

Portant ces valeurs dans l'équation (1) on a

$$\frac{1}{R^2+x^2+Cx}+\frac{1}{R^2+x^2-Cx}=\frac{2}{x^2}.$$

Ces ... réduisant au même dénominateur

$x^2(R^2+x^2-Cx+x^2+R^2+Cx) = 2(R^2+x^2-Cx)(R^2+x^2+Cx)$

D'où $x^2(2R^2+2x^2) = 2(R^4+x^4+2R^2x^2-x^2C^2)$.

Mais $C^2 = 2R^2$ car $\overline{BD}^2 = \overline{OB}^2+\overline{OD}^2$.

Donc $2R^2x^2+2x^4 = 2R^4+2x^4+4R^2x^2-4x^2R^2$.

D'où $2R^2x^2 = 2R^4$; d'où $x^2 = \frac{2R^4}{2R^2} = \frac{R^4}{R^2} = R^2$

D'où $x = \pm\sqrt{R^2} = \pm R$.

Si x' et x'' désignent les racines de l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$,
avoir cette égalité :

$$\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{x - x'} + \frac{1}{x - x''}$$

Solution.

Réduisant $\frac{1}{x-x'} + \frac{1}{x-x''}$ on a

$$\frac{1}{x-x'} + \frac{1}{x-x''} = \frac{x - x'' + x - x'}{(x-x')(x-x'')} = \frac{2x - x' - x''}{(x-x')(x-x'')}$$

$$= \frac{2x - (x'+x'')}{(x-x')(x-x'')}.$$

Mais $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, d'où

$$\frac{2x - (x'+x'')}{(x-x')(x-x'')} = \frac{2x - \left(-\frac{b}{a}\right)}{(x-x')(x-x'')} = \frac{2x + \frac{b}{a}}{(x-x')(x-x'')}$$

$$= \frac{\frac{2ax + b}{a}}{(x-x')(x-x'')}$$

Multipliant par a les deux membres de cette dernière fraction, il vient :

$$\frac{2ax + b}{a(x-x')(x-x'')}.$$

Mais, d'après une question d'Algèbre

$$a(x-x')(x-x'') = ax^2 + bx + c, \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{x-x'} + \frac{1}{x-x''} = \frac{2ax+b}{a(x-x')(x-x'')} = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}.$$

Deux ouvriers A et B pourraient faire un ouvrage en m jours; ils travaillent ensemble pendant n jours, après lesquels B reste seul et termine l'ouvrage en p jours. Combien de jours chacun d'eux aurait-il mis à faire l'ouvrage seul ?

— Solution —

Soit A et B les deux ouvriers, m le temps pendant lequel ils pourraient ensemble faire l'ouvrage, p le temps au bout duquel B termine l'ouvrage. On a

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{m} \quad (1)$$

C'est-à-dire ce qu'ils font en un jour.

Nous aurons comme seconde équation

$$\frac{1}{m} \times n + \frac{1}{b} \times p = 1 \quad (2)$$

$\frac{1}{m} \times n$ équivalant au travail fait par A et B, $\frac{1}{b} \times p$ au travail fait par B.

Réduisant ces deux équations au même dénominateur on a

$$B + A \quad Bm + Am = BA. \quad (1')$$

$$nb + mp = mb \quad ([illegible])$$

De (2') nous tirons $nb - mb = -mp$ ou $mp = b(m-n)$.

D'où $b = \frac{mp}{m-n}$. Portant cette valeur de b dans (1') on obtient

$$\frac{mp}{m-n} \times m + am = \frac{mpa}{m-n}$$

ou $\frac{m^2p}{m-n} + am = \frac{mpa}{m-n}$.

D'où $a = \frac{m^2p}{mp - m(m-n)}$ ou $a = \frac{mp}{p - m + n}$ [illegible] $\frac{mp}{[illegible]}$.

Trouver le minimum du rapport $\frac{R}{r}$ dans un triangle, R désignant le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.

Solution.

La trigonométrie nous donne

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

Elle nous donne aussi $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$.

D'où $\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{2\sin A}}{(p-a)\tan\frac{A}{2}} = \frac{a}{2(p-a)\sin A \tan\frac{A}{2}} = \frac{a}{4(p-a)\sin^2\frac{A}{2}}$.

Faisant de côté le facteur $\frac{1}{4}$ nous chercherons le minimum de

$$\frac{a}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Or $\frac{a}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{a}{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{bc}} = \frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Cette dernière fraction sera minimum quand son dénominateur sera maximum. Le maximum du dénominateur a lieu pour $p-a = p-b = p-c$ ou $a = b = c$ puisque la somme $p-a + p-b + p-c = p$ est constante. Quand le minimum a lieu le triangle est donc équilatéral mais dans un triangle équilatéral le centre est à la fois ... c'est à dire que le rayon du cercle circonscrit est le double du rayon du cercle inscrit $R = 2r$.

Alors le rapport devient $\frac{R}{r} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

tel est le rapport minimum.

Résoudre un triangle connaissant l'angle $\hat{A}$ la médiane m et la hauteur h qui correspondent à l'angle

Solution.

Soit $AI = m$; $AH = h$; $IC = x$. $\hat{A}$ connu.

On a

$$4x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (1)$$

Mais la Géométrie nous donne

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{BI}^2 ; \text{ ou}$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2x^2.$$

Portant dans (1) cette valeur de $b^2 + c^2$ (?), on a

$$4x^2 = 2m^2 + 2x^2 - 2bc \cos A.$$

$$\text{ou} \quad x^2 = m^2 - bc \cos A \quad (2)$$

Mais $S = xh = \frac{bc \sin A}{2}$. D'où $bc = \frac{2xh}{\sin A}$.

Portant dans (2) cette valeur de bc, on a :

$$x^2 + 2xh \cot g A - m^2 = 0.$$

D'où $x = -h \cot A \pm \sqrt{h^2 \cot^2 A + m^2}$.

La seule valeur admissible est

$$x = -h \cot A + \sqrt{h^2 \cot^2 A + m^2}$$

$$a = BC = 2x = 2\left(-h \cot A + \sqrt{h^2 \cot^2 A + m^2}\right)$$

[illegible]

Résoudre l'équation :

$$\sin x \, \mathrm{tg}\, y = \mathrm{tg}\, b \quad (1)$$
$$\cos x \, \mathrm{cotg}\, y = \mathrm{cotg}\, a \quad (2)$$

Solution.

Multipliant membre à membre on a

$$\cos x \sin x = \mathrm{tg}\, b \, \mathrm{cotg}\, a$$

Éliminant ensuite y entre (2) (1) et [illegible]

$$\frac{\mathrm{tg}^2 b \, \mathrm{cotg}^2 a}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1.$$

[illegible] en remplaçant $\mathrm{cotg}^2 a$ par sa valeur en fonction de cos x

$$(1 + \mathrm{cotg}^2 a)\cos^2 x = \sin^2 a (1 + \mathrm{tg}^2 b).$$

D'où résultera

$$\cos^2 x = \frac{\mathrm{cotg}^2 a + \mathrm{cot}^2 a \, \mathrm{tg}^2 b}{1 + \mathrm{cot}^2 a}$$

Nous étions obtenu :

$$\cos x = \pm \frac{\cos a}{\cos b}$$

cos x a deux valeurs [illegible]

[illegible]

$\sin y = \frac{\sin b}{\sin a}$ en remplaçant dans (1) (2) x et b par

$$\frac{\pi}{2} - y \text{ et } \frac{\pi}{2} - a$$

ce qui ne change rien aux équations

Trouver le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2+1} = \varphi.$$

Solution.

Posant $\frac{x^2+3x+5}{x^2+1} = y$ il vient

$$x^2(y-1) - 3x - 5 + y = 0.$$

D'où $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20y - 20 - 4y^2 + 4y}}{2(y-1)}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{-4y^2 + 24y - 11}}{2(y-1)}$

Pour que les racines de l'équation soient réelles il faut qu'on ait

$-4y^2 + 24y - 11 > 0$ ou $\left(y - \frac{11}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) < 0.$

Le maximum de y est donc $\frac{11}{2}$; et le minimum $\frac{1}{2}$. Pour le maximum

$x = \frac{3}{2\left(\frac{11}{2}-1\right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$

Pour le minimum $x = \frac{3}{2\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{3}{-1} = -3.$

La fraction ne sera jamais nulle car le dénominateur x^2+1 est essentiellement positif et le numérateur l'est aussi, puisque ses racines sont imaginaires. Elle est [illegible] puisque ses deux termes sont toujours positifs. Quand x est infini elle devient $\frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$

Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la hauteur correspondante h.

Solution.

Soit $BC=a$; $AH=h$; $BA=x$; $AC=y$.

On a $xy = ah$ (1)

Mais $x = a \cos B$; $y = a \sin B$.

Portant dans (1) ces valeurs de x et de y il vient.

$$a^2 \sin B \cos B = ah, \text{ ou } a \sin B \cos B = h.$$

Mais $\sin B \cos B = \frac{\sin 2B}{2}$. D'où

$$a \frac{\sin 2B}{2} = h$$

D'où $\sin 2B = \frac{2h}{a}$.

Connaissant $2B$ et par suite B on connaîtra facilement C; $\sin C = \frac{\sqrt{a^2-4h^2}}{a}$.

Pour que la valeur de $\sin 2B$ soit admissible il faut qu'elle soit plus petite que 1.

Il faut que $\sin 2B \leqq 1$; ou $\frac{2h}{a} \leqq 1$

ou $2h \leqq a$. La valeur maximum de h est donc $\frac{a}{2}$.

Alors $\sin 2B = 1$; $2B = 90$; $B = C = 45$.

Condition [illegible] impossibilité si $h > \frac{a}{2}$.

Chercher 1° le maximum de $\sin^m x \cos^m x$.
2° celui de $\sin^m x \cos^n x$.

Solution.

1° maximum de $\sin^m x \cos^m x$.

Nous avons $\sin^m x \cos^m x = \dfrac{\sin^m 2x}{2^m}$.

Il faut donc chercher le maximum de $\dfrac{\sin^m 2x}{2^m}$ ou de $\sin^m 2x$.

Nous devons avoir $\sin^m 2x < 1$; ou $\sin 2x \leq 1$.

Le maximum de $\sin 2x$ ou de $\sin^m 2x$ est donc 1.

Alors $2x = 90$; $x = 45°$.

2° Maximum de $\sin^m x \cos^n x$.

On a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Le maximum aura lieu quand les facteurs $\sin^m x \cos^n x$ seront proportionnels à leurs exposants, c'est-à-dire quand

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{m}{n} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Nous avons

$$\sin x = \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{n}{m+n}}$$

$$\sin^m x \cos^n x = \sqrt[2]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n}$$

$$= \sqrt{\frac{m^m \times n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

Résoudre les équations

$x^2 + xy + y^2 = a^2$ (1)

$xy = b^2$ (2)

Solution

Ajoutant on a $(x+y)^2 = a^2 + b^2$ ou $x+y = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ (1)'

Multipliant la seconde par 3 il vient $3xy = 3b^2$.

Retranchant cette nouvelle équation de (1) il vient :

$(x-y)^2 = a^2 - 3b^2$; ou $x - y = \pm\sqrt{a^2-3b^2}$ (2)'

On a donc $\begin{cases} x+y = \pm\sqrt{a^2+b^2} & (1)' \\ x-y = \pm\sqrt{a^2-3b^2} & (2)' \end{cases}$

Ajoutant ces deux équations il vient

$2x = \pm\sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{a^2-3b^2}$

D'où $x = \dfrac{\pm\sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{a^2-3b^2}}{2}$

Maintenant, si l'on retranchant (2)' de la première équation (1)' on aura trouvé la valeur qui est

$2y = \pm\sqrt{a^2+b^2} \mp \sqrt{a^2-3b^2}$

ou $y = \dfrac{\pm\sqrt{a^2+b^2} \mp \sqrt{a^2-3b^2}}{2}$

D'où $x = \dfrac{\pm\sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{a^2-3b^2}}{2}$

$y = \dfrac{\pm\sqrt{a^2+b^2} \mp \sqrt{a^2-3b^2}}{2}$

Une sphère de bois dont la densité est 0,840625 est plongée dans l'eau. Calculer la flèche de la partie flottante.

Solution

Soit AB la surface du liquide, OA = R, IH = x, et la densité de la sphère, d' celle de l'eau. Le poids de la sphère étant égal au poids du liquide déplacé on a :

Segment AMB × d' = vol. sphère × d.

$$\frac{\text{Segment AHB}}{\text{vol. sphère}} = \frac{d'-d}{d}.$$

Segment AHB = $\frac{\pi \overline{IB}^2 \times IH}{2} + \frac{\pi \overline{IH}^3}{6}$. Vol. sphère = $\frac{\pi D^3}{6}$.

Mais $\overline{IB}^2 = IH \times IM = x(D-x)$. Donc on a

$$\frac{\frac{\pi x^2(D-x)}{2} + \frac{\pi x^3}{6}}{\frac{\pi D^3}{6}} = \frac{d'-d}{d}.$$

Divisant par π et simplifiant il vient

$\frac{3Dx^2 - 2x^3}{D^3} = \frac{d'-d}{d}$. Si nous remplaçons $\frac{x}{D}$ par y et $\frac{d}{d'} = v$ il vient $y^2(3-2y) = 1-v$ équation qui fera connaître x. Comme application on a

$d' = 1$; $d = 0,840625 = \frac{840625}{1000000} = \frac{27}{32} = v$.

Donc $1-v = 1 - \frac{27}{32} = \frac{5}{32}$.

L'équation devient $2y^3 - 3y^2 + \frac{5}{32} = 0$. Remplaçant y par $\frac{z}{4}$ il vient $z^3 - 6z^2 + 5 = 0$ équation satisfaite pour $z = 1$.

Alors $y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{D}{4}$.

Calculer trois nombres x, y, z sachant que leur somme est 195; que le 3e = le premier plus 120 et qu'ils forment entre eux une progression géométrique.

Solution.

D'après l'énoncé on a donc

$x+y+z=195$; $z=120+x$. Puisque x, y, z forment une progression géométrique en désignant x par a, la raison par q on a

$$a+aq+aq^2=195 \quad (1)$$

$$aq^2-a=120. \quad (2)$$

Retranchant (2) de (1) il vient $2a+aq=75$. D'où $a=\frac{75}{2+q}$.

Portant dans (2) cette valeur de a, il vient

$$\frac{75q^2}{2+q}-\frac{75}{2+q}=120.$$

Réduisant au même dénominateur, on trouve l'équation

$$5q^2-8q-21=0$$

D'où $q=\frac{4\pm\sqrt{16+105}}{5}=\frac{4\pm 11}{5}$.

D'où $q'=3$; $q''=-1,4$.

Pour $q'=3$, $a=15$ et la progression est

$$15,\ 45,\ 135.$$

Pour $q''=-1,4$: $a=125$ la progression est

$$125,\ -175,\ 245.$$

On donne un triangle équilatéral. Sur chacun de ses sommets on décrit une circonférence. On décrit un cercle dans le triangle tangent aux [illegible] que forment les 3 premiers cercles décrits avec (1) pour rayon. On [illegible] ensuite on décrit une autre cercle qui entoure les 3 premiers. Calculer la moyenne proportionnelle entre le rayon du premier cercle et celui du plus petit cercle et comparer cette moyenne proportionnelle avec le rayon du cercle [illegible] au triangle.

Solution

Soit R le rayon du cercle entouré par les 3 cercles décrits des trois sommets du triangle avec 1 pour rayon. On a

$$(1+R)^2 = 1^2 + (h-(1+R))^2. \text{ D'où}$$

$$1+h^2-2h-2hR=0.$$

D'où $R = \frac{h^2-2h+1}{2h}$; $h = \frac{2\sqrt{3}}{2}$. D'où $R = \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Soit maintenant R' le rayon du cercle qui entoure les trois cercles décrits des sommets du triangle comme centres, on a

$$R' = 2+R = 2+\frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

La moyenne proportionnelle x entre R et R' est

$$x = \sqrt{R\times R'} = \sqrt{\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{\frac{4^2-(2\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{16-12}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Soit enfin x' le rayon du cercle inscrit au triangle, ce triangle est équilatéral nous avons

$$x' = \sqrt{\frac{(p-a)^3}{p}} = \sqrt{\frac{(3-2)^3}{3}} = \sqrt{\frac{1^3}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

et nous voyons que ce rayon x est égal à la moyenne proportionnelle.

Chercher le maximum et le minimum s'il y en a de l'expression $\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}$.

Solution.

Égalant cette fraction à y il vient :

$$\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}=y.$$

D'où en réduisant au même dénominateur

$$x^2(1-y)-x(1+y)+(y-1)=0.$$

D'où résolvant

$$x=\frac{1+y\pm\sqrt{(1+y)^2-4(y-1)(1-y)}}{2(1-y)}$$

d'où $$x=\frac{1+y\pm\sqrt{5y^2-6y+5}}{2(1-y)}.$$

Les racines du trinôme placé sous le radical sont imaginaires. Il en résulte que le trinôme est [illegible] [illegible] deux cas.

Il ne peut être jamais négatif et on peut donner à y toutes valeurs [illegible].

La fraction proposée $\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}$ n'a donc ni maximum ni minimum.

Étant donné les 3 côtés d'un triangle ~~hauteur~~ et les deux segments m, n déterminés sur CB par la bissectrice de l'angle A calculer cette bissectrice.

Solution.

Soit AS la bissectrice de l'angle A ; AS = h ; AC = b ; AB = c ; CB = a ; m et n les deux segments que la bissectrice AS détermine sur CB.

D'après ce théorème de Géométrie qui dit que si dans un triangle ABC on divise l'angle A en deux parties égales par la ligne SA, le rectangle des côtés AC, AB sera égal au rectangle des segments m et n plus au carré de sécante h, on

$$h^2 = bc - mn;$$

D'où $h = \sqrt{bc - mn}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m} \text{ d'où } \frac{b+c}{c} = \frac{n+m}{m}.$$

d'où $\frac{b+c}{c} = \frac{a}{m}$. d'où $m = \frac{ac}{b+c}$.

$$n = a - \frac{ca}{b+c} = \frac{ba}{b+c}.$$

$$h = \sqrt{bc - \frac{ca}{b+c} \times \frac{ab}{b+c}} = \sqrt{bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2 bc - bca^2}{(b+c)^2}} = \sqrt{\frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

Étant donnée une sphère de rayon R, on y inscrit un cylindre équilatéral, puis une sphère dans ce cylindre et ainsi de suite indéfiniment. On demande la somme des surfaces de ces sphères.

Solution.

Soit CA = R; KAMN le cylindre équilatéral. Le rayon de la seconde sphère inscrite dans KAMN sera l'apothème du cylindre ou du carré KAMN. Il sera égal à $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Le rayon de la troisième sphère sera $\frac{R\sqrt{2}}{4}$.

Celui de la 4e sera $\frac{R\sqrt{2}}{8}$.

Et ainsi de suite.

La surface de la 1e est $4\pi R^2$.

Celle de la 2e est $4\pi\left(\frac{R^2 2}{4}\right) = 4\pi\frac{R^2}{2} = 2\pi R^2$.

Celle de la 3e est πR^2.

Ces surfaces forment donc une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{2}$.

Leur somme

$$S + \frac{S}{2} + \frac{S}{2^2} + \frac{S}{2^3} \dots = S\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\dots\right)$$

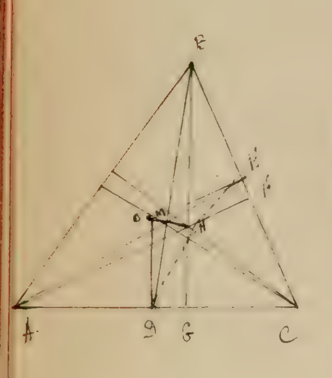
Mais $S = 4\pi R^2$

d'où somme $= 4\pi R^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots\right)$

$$4\pi R^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\pi R^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi R^2}{\ldots}\ [illegible]$$

Le point de concours des hauteurs d'un triangle, le point de concours des médianes et le centre du cercle circonscrit sont en ligne droite, et la distance des deux premiers points est double de celle des deux derniers.

Solution.



Soit à démontrer que $MH = 2MO$ et que MOH est en ligne droite.

Soit ABC le triangle, AF, BG les hauteurs, AE, BD les médianes.

Joignons M à O et à H et menons DE.

Les triangles ABH, ODE sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires. De plus ED joignant les milieux des côtés AC, BC est égale à $\frac{BA}{2}$ et est parallèle à BA.

On a donc

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BH}{OD}$$

ou $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$ Mais $\frac{BM}{MD} = \frac{2}{1}$.

car nous savons que le point de rencontre des médianes d'un triangle est aux $\frac{2}{3}$ du sommet.

Les triangles BMH, OMD sont donc semblables et l'angle

$\widehat{OMD} = \widehat{BMH}$.

Donc OMH est une ligne droite.

Comme on a $\frac{BM}{MD} = \frac{MH}{OH} = \frac{2}{1}$.

Il s'ensuit que $MH = 2OM$.

Quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ [illegible] la fraction

$$\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$$

n'acquiert jamais une valeur comprise entre 5 et 9.

Solution.

Égalant à y il vient

$$x^2(y-1)+2x(y-17)-7y+71=0$$

D'où $x = \dfrac{-(y-17) \pm \sqrt{(y-17)^2+(y-1)(7y-71)}}{y-1}$

ou $x = \dfrac{-(y-17) \pm \sqrt{8y^2-112y+360}}{(y-1)}$

Égalant à 0 le trinôme placé sous le radical comme le coefficient de y^2 est positif y' sera un minimum et y'' maximum. $y'=9$; $y''=5$.

Pour que ce trinôme du radical soit positif il faut que y ne soit pas comprise entre 5 et 9.

[illegible]

[illegible] et [illegible]

[illegible] $\dfrac{[illegible]}{y-1}$ [illegible]

[illegible] $\dfrac{17}{y-1}$ [illegible]

Quand [illegible]

$$\frac{1+\frac{34}{x}-\frac{71}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}} = 1.$$

Résoudre un triangle rectangle [illegible] demi-
2p et la hauteur correspondant à l'[illegible]

Solution.

On a : $x + y = 2p - a$ (1)

$x^2 + y^2 = a^2$ (2)

$xy = ha$ (3)

Élevant (1) au carré on a $(x+y)^2 = (2p-a)^2$ (4)

Retranchant (2) de (4) il vient $xy = 2p(p-a)$ (5).

Mais $xy = ha$. D'où $ha = 2p(p-a)$ d'où $a = \frac{2p^2}{h+2p}$.

Nous avons aussi $\sin 2B = \frac{2h}{a}$.

D'où $a = \frac{2h}{\sin 2B}$.

D'où $\frac{2h}{\sin 2B} = \frac{2p^2}{h+2p}$; $\sin 2B = \frac{h(h+2p)}{p^2}$.

Pour que la valeur de $\sin 2B$ soit admissible il faut qu'elle soit plus petite que 1 en d'autres termes qu'on ait $h(h+2p) < p^2$; ou

$$h(h+2p) - p^2 < 0$$ ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(h - (-p + p\sqrt{2})\right)\left(h - (p - p\sqrt{2})\right) < 0$$

Le maximum est $h = p(\sqrt{2}+1)$

Le triangle alors est rectangle isocèle, $b = c = [illegible]$.

[illegible] $h(h+2p) \le p^2$ [illegible]

On a deux sphères ; la différence de leurs volumes est 47. La différence de leurs rayons est 1,75. Calculer les rayons de ces deux sphères.

Solution.

Soit x le rayon d'une sphère, celui de l'autre sera $x - 1,75$ et, d'après l'énoncé on aura :

$$\frac{4}{3}\pi x^3 - \frac{4}{3}\pi (x - 1,75)^3 = 47.$$

D'où $\frac{4}{3}\pi \left(x^3 - (x-1,75)^3 \right) = 47.$

D'où $\frac{4}{3}\pi \left(x^3 - x^3 + 3x^2 \times 1,75 - 3x \, \overline{1,75}^2 + \overline{1,75}^3 \right) = 47.$

D'où $\frac{4}{3}\pi \left(5,25 x^2 - 9,1875 x + 5,359375 \right) = 47.$

$$x^2 \, 5,25 - 9,1875 x + 5,359375 = \frac{47 \times 3}{4\pi}.$$

D'où

$$x^2 \, 5,25 - 9,1875 x - 5,861 = 0.$$

D'où $x^2 - \left(\frac{9,1875}{5,25} \right) x - \frac{5,861}{5,25} = 0.$

$$x^2 - 1,75 x - 1,1163 = 0.$$

D'où $x = 0,875 \pm \sqrt{1,1163 + \overline{0,875}^2}$

D'où $x = 2,250$

en prenant le signe positif.

L'autre rayon égale alors

$$2,25 - 1,75 = 0,500.$$

Étant donné deux circonférences concentriques de rayon R et R', ou deux sphères concentriques, on les coupe [illegible] par deux plans parallèles. Calculer le volume compris entre ces deux plans en dehors de la petite sphère.

Solution.

Soit $OC = a$; $CC' = b$; $OC' = a+b$; $CA = R$; $CM = R'$.

Vol. $ABMM'$ + vol. $KK'B'A'$ = vol $ABA'B'$ − vol $MM'KK'$.

Vol. $ABA'B' = \frac{\pi(\overline{AC}^2 + \overline{BC'}^2)}{2} CC' + \frac{\pi \overline{CC'}^3}{6}$.

Vol. $KK'MM' = \frac{\pi(\overline{MC}^2 + \overline{M'C'}^2)}{2} CC' + \frac{\pi \overline{CC'}^3}{6}$.

Vol. $ABMM'$ + vol. $KK'B'A' = \frac{\pi(\overline{AC}^2 + \overline{BC'}^2) CC'}{2} + \frac{\pi \overline{CC'}^3}{6} - \frac{\pi(\overline{MC}^2 + \overline{MC'}^2) CC'}{2} - \frac{\pi \overline{CC'}^3}{6}$.

Vol $ABMM'$ + vol $KK'A'B' = \frac{\pi}{2} CC' (\overline{AC}^2 + \overline{BC'}^2 - \overline{MC}^2 - \overline{M'C'}^2)$

Mais $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2 = R^2 - a^2$.

$\overline{BC'}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC'}^2 = R^2 - (a+b)^2 = R^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OC}^2 = R'^2 - a^2$.

$\overline{M'C'}^2 = \overline{M'O}^2 - \overline{OC'}^2 = R'^2 - (a+b)^2 = R'^2 - a^2 - b^2 - 2ab$.

D'où, encore :

Vol. $ABMM'$ + vol $KK'A'B' = \frac{\pi CC'}{2}(2R^2 - 2R'^2)$

Vol. $ABMM'$ + vol $KK'A'B' = \pi CC'(R^2 - R'^2)$.

Mais $b = CC'$.

D'où

Vol. $ABMM'$ + vol $KK'A'B' = \pi b (R^2 - R'^2)$

Résoudre les deux équations.

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$
$$x^3 + px^2 - px - 1 = 0$$

Solution.

I°. Résolvons $x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$.

Divisant les deux termes par x^2, il vient:

$$x^2 + px + q + \frac{p}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

d'où $x^2 + \frac{1}{x^2} + p\left(x + \frac{1}{x}\right) + q = 0$.

Posant $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} = y$ on a

$y^2 - 2 + py + q = 0$. $y = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q + 8}}{2}$

$x^2 - xy + 1 = 0$; $x^2 + px + \sqrt{p^2 - 4q + 8}$;

$2x^2 + px - \sqrt{p^2 - 4q + 8} = 0$ $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 8\sqrt{p^2 - 4q + 8}}}{2}$

II Résolvons $x^3 + px^2 - px - 1 = 0$.

Divisant les deux membres par [illegible]

$x^2\left(x - \frac{1}{x^2}\right) + p(x - 1) = 0$

D'où $\frac{x(x^3 - 1)}{x^2} + p(x - 1) = 0$.

ou $\frac{x^3 - 1}{x} + p(x - 1) = 0$

Mettant $x - 1$ en facteur commun il vient

$(x - 1)x(x^2 + x + 1 + p) = 0$

Nous avons les deux équations $x - 1 = 0$ d'où $x = 1$.

ensuite $x^2 + x + p + 1 = 0$.

D'où $x = \frac{-(p+1) \pm \sqrt{-p^2 + 2p - 3}}{2}$

Pour que les racines soient réelles il faut que on ait
$-p^2 + 2p > 3$ ou $p^2 - 2p > 3$ ou $p(p - 2) > 3$

Démontrer que
$tg(45+a) - tg(45-a) = 2\,tg\,2a$?

Solution.

Comme $tg(45-a)$ ... remplaçant $tg(45+a)$
et $tg(45-a)$ respectivement par leur valeur

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}, \quad \frac{1-tg\,a}{1+tg\,a} \text{ on a:}$$

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a} - \frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}.$$

Réduisant au même dénominateur on a:

$$\frac{(1+tg\,a)^2-(1-tg\,a)^2}{1-tg^2 a}$$

ou en effectuant les opérations

$$\frac{(1+tg\,a)^2-(1-tg\,a)^2}{1-tg^2 a} = \frac{1+tg^2 a+2tg\,a-1-tg^2 a+2tg\,a}{1-tg^2 a}$$

$$= \frac{4tg\,a}{1-tg^2 a}.$$

D'où $\frac{4tg\,a}{1-tg^2 a} = 2\times\frac{2tg\,a}{1-tg^2 a} = 2tg\,2a$?

car nous savons par une formule de trigonométrie
démontrée dans Bos page 43

$$tg\,2a = \frac{2tg\,a}{1-tg^2 a}.$$

D'où

$tg(45+a) - tg(45-a) = 2tg\,2a.$

Quelle condition doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^2+px+q=0$$

pour que les racines admettent une différence d.

Solution.

Soit x', x'' les deux racines ; d leur différence ; on a :

$$x'-x''=d \quad (1)$$

$$x'+x''=-p \quad (2)$$

$$x'x''=q \quad (3)$$

Ajoutant les équations (1) et (2) il vient :

$$2x'=d-p \text{ ; d'où } x'=\frac{d-p}{2}.$$

Retranchant (2) de (1) on a

$$-2x''=p+d \text{ d'où encore}$$

$$2x''=-p-d \text{ ; } x''=\frac{-p-d}{2}.$$

Portant dans (3) ces valeurs de x' et x'' on a pour relation demandée

$$\frac{d-p}{2}\cdot\frac{-p-d}{2}=q$$

ou bien en observant que

$$(-p+d)(-p-d)$$

est le produit de la somme de deux quantités par leur différence :

$$p^2-d^2=4q.$$

Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté

Solution

Soit x le côté on a $y - x = d$ (1)

$y = x\sqrt{2}$. (2)

On tire de ces équations

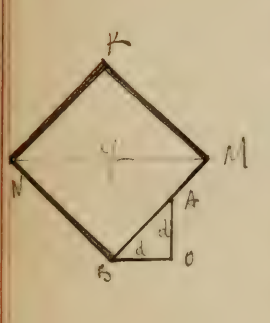
$x = \frac{d}{\sqrt{2}-1}$ en prenant la solution positive

car la solution négative ne peut [illegible]

Cette valeur [illegible]

En effet on a $x = \frac{d}{\sqrt{2}-1} = \frac{d(\sqrt{2}+1)}{d(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{d(\sqrt{2}+1)}{d} = d(\sqrt{2}+1)$

Le radical est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle ayant d pour côté de l'angle droit. Construisant ce triangle



AOB on a $AB = d\sqrt{2}$. Prolongeons maintenant AB d'une quantité $AM = AO =$ [illegible] $MB = x = d(\sqrt{2}+1)$

[illegible] BM [illegible] MB

[illegible]

Nous pouvons tirer les valeurs x et y de la similitude des triangles AOB, MNB car ils sont semblables comme ayant leurs trois [illegible]

$\frac{MN}{AB} = \frac{BM}{BO}$ ou $\frac{x+d}{d\sqrt{2}} = \frac{x}{d}$ d'où

$x + d = x\sqrt{2}$; $x = \frac{d}{\sqrt{2}-1} = \frac{d(\sqrt{2}+1)}{d(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{d(\sqrt{2}+1)}{d(2-1)} =$ [illegible]

Chercher le maximum et le minimum de la fonction

$$\frac{2x-7}{2x^2-2x-5}.$$

Solution.

Égalant cette fonction à y, il vient:

$$y = \frac{2x-7}{2x^2-2x-5}$$

D'où $2x^2y - 2xy - 5y - 2x + 7 = 0$

D'où $2x^2y - 2x(y+1) - 5y + 7 = 0$

D'où $x = \frac{y+1 \pm \sqrt{y^2+2y+1+10y^2-14y}}{2y}$

D'où $x = \frac{y+1 \pm \sqrt{11y^2-12y+1}}{2y}.$

Pour que les racines soient réelles il faut que l'on ait:

$$11y^2 - 12y + 1 > 0.$$

~~L~~ ou $(y-1)(y-\frac{1}{11}) > 0.$

Toute valeur comprise entre 1 et $\frac{1}{11}$ substituée à y dans le trinôme donnerait un résultat négatif, les valeurs de x seraient alors imaginaires.

x ne sera donc réel [illegible] y [illegible] valeurs comprises [illegible] $-\infty$ [illegible] ∞.

1 est donc le minimum et $1/_{11}$ le maximum.

Déterminer l'aire d'un triangle en fonction des 3 côtés.

Solution.

Soit ABC le triangle, a, b, c les côtés. Il faut démontrer la formule connue

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Menons la hauteur AD; nous avons:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times BD$$

d'où $BD = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

$$\overline{AD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{(a+c)^2-b^2}{2a} \cdot \frac{b^2-(a-c)^2}{2a} = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

Mais $a+b+c = 2p$, $a+c-b = 2(p-b)$, $a+b-c = 2(p-c)$, $b+c-a = 2(p-a)$. Donc

$$\overline{AD}^2 = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}{4a^2}$$

$$= \frac{16}{4a^2}\left(p(p-a)(p-b)(p-c)\right)$$

Donc $AD = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Mais $a \times AD = 2$ surface ABC.

Donc on a

$$\text{surface } ABC = \frac{2a}{2a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Résoudre l'équation exponentielle
$$ax + ba^{-x} + c = 0$$

Solution.

On a $ba^{-x} = \dfrac{b}{a^x}$.

par suite l'équation $ax + ba^{-x} + c = 0$ devient

$$a^x + \frac{b}{a^x} + c = 0.$$

D'où, en multipliant par a^x

$$a^{2x} + ca^x + b = 0.$$

Si maintenant on pose

$$a^x = y \quad \text{il vient}$$

$$y^2 + cy + b = 0$$

Nous tirons delà deux valeurs pour y qui nous donnent pour x deux valeurs correspondantes.

On a

$$ax = y' \; ; \; ax = y''$$

D'où $x' = \dfrac{\log y'}{\log a}$

$$x'' = \frac{\log y''}{\log a}$$

Trouver le minimum de l'expression

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x}.$$

Solution.

Égalant à y il vient

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x} = y.$$

Réduisant au même dénominateur on a :

$$yx = ab + bx + ax + x^2$$

ou $x^2 + x(b+a) + ab - yx = 0$

ou $x^2 + x(b+a-y) + ab = 0.$

D'où $x = \frac{-(b+a-y) \pm \sqrt{b^2+a^2+y^2+2ab-2by-2ay-4ab}}{2}$

$= \frac{-(b+a-y) \pm \sqrt{b^2+a^2+y^2-2by-2ay-2ab}}{2}$

Pour que les valeurs de x soient réelles il faut que

$$b^2+a^2+y^2-2ay-2by-2ab > 0.$$

Le minimum de y sera donc pour

$$y^2 - 2y(b+a) + b^2+a^2-2ab = 0.$$

Alors $y = b+a \pm \sqrt{b^2+a^2+2ab-b^2-a^2+2ab} = b+a \pm 2\sqrt{ab}.$

y minimum $= b+a+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$

Quand ce minimum a lieu

$$x = \frac{-(b+a)+(b+a+2\sqrt{ab})}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}.$$

La somme des côtés de deux cubes est 5; la somme de leurs volumes est 56,6. Trouver les deux côtés des cubes.

Solution.

On a $(x+y)=5$ (1) $x^3+y^3=56,6$ (2).

Élevant (1) au cube il vient

$x^3+y^3+3x^2y+3y^2x=125$. (3).

Soustrayant (2) de (3) on a

$3x^2y+3y^2x=125-56,6=68,4$.

D'où $3x^2y+3y^2x=68,4$. (4).

De (1) nous tirons $y=5-x$

Portant dans (4) cette valeur de y on a

$15x^2-75x=-68,4$.

D'où $15x^2-75x+68,4=0$.

D'où $x=\frac{75\pm\sqrt{5625-4104}}{30}$

$x=\frac{75\pm\sqrt{1521}}{30}=\frac{75\pm39}{30}$

$=3,80$ en prenant la racine positive.

y égale alors $5-3,8=1,20$.

Étant donné deux points A et B, trouver sur la ligne ST un point P tel que les angles APS, BPT soient égaux.

Solution :

Je construis A' symétrique de A. J'ai ainsi KA = KA' AA' étant symétrique par rapport à ST. Je construis de même B' symétrique de B par rapport à ST. J'ai K'B' = K'B. Je joins le point B au point A' et le point A au point B'. Ces deux lignes coupent ST en un point P qui est le point demandé.

En effet le triangle APA' est isocèle puisque AP = A'P. Donc KP est bissectrice du point P et l'angle APK = KPA'. De même BPK' = K'PB'. Mais les deux angles APA', BPB' sont égaux comme opposés par le sommet. Leurs moitiés sont donc égales. Par conséquent APK = BPK'.

L'on voit donc que pour résoudre le problème il suffit [illegible] les points [illegible] A et B [illegible] le point A et A' au point B. Le point où les deux lignes AB', A'B se coupent est le point demandé.

Chercher le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{2x-3}{x^2+4}.$$

Solution.

Égalant à y il vient

$$\frac{2x-3}{x^2+4}=y.$$

Réduisant au même dénominateur on a

$$yx^2+4y-2x+3=0.$$

D'où $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2-3y}}{y}$.

La condition de réalité est celle-ci

$$-4y^2-3y+1>0$$

ou $4y^2+3y-1<0$.

Et alors les valeurs de y doivent être comprises entre les racines du trinôme

ou $y=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\frac{-3\pm5}{8}$; $y=-1$; $y=\frac{1}{4}$.

Il faut donc qu'on ait

$$-1<y<\frac{1}{4}.$$

-1 est donc le minimum pour $x=-1$

et $\frac{1}{4}$ le maximum pour $x=4$.

Quand x est très grand la fraction devient

$$\frac{2x-3}{x^2+4}=\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Résoudre l'équation du second degré en remplaçant x par $(y + h)$ et donnant à h une valeur telle que l'équation ne renferme pas de second terme.

Solution.

Soit ax^2+bx+c.

Remplaçant x par $y+h$ on a

$$a(y^2+h^2+2hy)+by+bh+c=0$$

$$ay^2+(2ah+b)y+ah^2+bh+c=0. \quad (1)$$

Pour que le second terme de cette équation s'annule il suffit que $h=-\frac{b}{2a}$.

Alors (1) devient

$$ay^2+y\left(\frac{-2ab}{2a}+b\right)+\frac{ab^2}{4a^2}+b\cdot\frac{-b}{2a}+c=0$$

ou $ay^2+\frac{ab^2}{4a^2}+-\frac{b^2}{2a}+c=0$

D'où l'on tire

$$4a^2y^2+ab^2-2ab^2+4a^2c=0.$$

D'où $4a^2y^2-ab^2+4a^2c=0$.

D'où divisant les deux membres par a l'on a

$$4ay^2-b^2+4ac=0.$$

D'où $y^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$

D'où enfin

$$y=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sur un diamètre 2R on décrit une demi-circonférence. [illegible] une corde quelconque AB. Calculer l'angle ABM = x de telle sorte que le volume [illegible] BM [illegible] soit le même [illegible] quand la figure tourne autour de BM.

Solution.

$\text{Vol. } ABM = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{m}$; d'après l'énoncé.

$\text{Vol. } ABM = \text{vol. } ABO + \text{vol. } AOM.$

$\text{vol. } ABO = \frac{\pi \overline{AC}^2 \times R}{3}$. $\text{vol. } AOM = \frac{2\pi R^2 \times (CM)}{3}$.

$\overline{AC}^2 = R^2 \sin^2 2\alpha$ puisque $A\hat{O}M = 2 A\hat{B}M$.

$CM = R - OC = R - R\cos 2\alpha = R(1-\cos 2\alpha) = 2R\sin^2\alpha.$

D'où $\frac{\pi R^3 \sin^2 2\alpha}{3} + \frac{4\pi R^3 \sin^2\alpha}{3} = \frac{4\pi R^3}{3m}$.

D'où $m\sin^2 2\alpha + 4m\sin^2\alpha = 4$.

D'où $m\sin^4 x - 2m\sin^2 x + 1 = 0$.

D'où $\sin^2 x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - m}}{m}$.

Pour que la valeur de sin x soit admissible il faut qu'on ait $m^2 > m$; ou $m > 1$. Le minimum de m est donc 1.

Alors $\sin^2 x = \frac{m}{m} = 1$, $\sin x = 1$, $x = 90°$ [illegible]

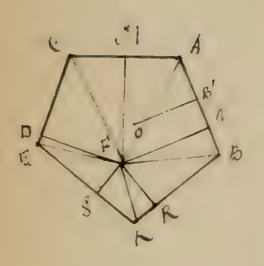
position de A' perpendiculaire sur BM, le volume [illegible]

[illegible] < 1 [illegible]

[illegible]

Conclusion $m \geq 1$, impossible [illegible] $m < 1$.

Si d'un point pris dans l'intérieur d'un polygone régulier on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, la somme de ces perpendiculaires est égale à m fois le rayon du cercle inscrit.



Solution

Soit CABKE le polygone régulier, OB' le rayon du cercle inscrit, DF, MF, NF, RF, SF les diverses perpendiculaires. Nous savons que la surface d'un polygone régulier est égale au périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit. Si m AB est le nombre de côtés, on aura :

$$S = \frac{m \times AB \times OB'}{2} = \frac{m \times AB \times r}{2} \quad (1)$$

Mais $S.tr.CFE = \frac{CE \times DF}{2}$, $EFK = \frac{ES \times EK}{2} = \frac{CE \times FS}{2}$.

Nous trouverions que la surface d'un polygone régulier est équivalente à son côté multiplié par la demi-somme des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un point quelconque dans l'intérieur du polygone. Donc

(2) $S = \frac{AB \times P}{2}$ en représentant par P la somme des perpendiculaires abaissées du point F.

D'où $\frac{m \times AB \times r}{2} = \frac{AB \times P}{2}$. Divisant par $\frac{AB}{2}$

$m \times r = P$.

Dans un triangle ABC on connaît les deux côtés AB, AC et l'on sait que le côté BC est égal à la hauteur correspondante AM. Calculer l'angle A.

Solution.

On a $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. D'où $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$. (1)

On a aussi:

$a = c \sin B$. D'où $\sin B = \frac{a}{c}$.

Portant dans (1) cette valeur de $\sin B$ il vient

$$\sin A = \frac{a \times \frac{a}{c}}{b}$$

ou $\sin A = \frac{a^2}{cb}$.

Pour que le problème soit possible ou pour que la valeur de $\sin A$ soit admissible nous devons avoir

$$\sin A \leq 1 \text{ ou}$$

$$\frac{a^2}{cb} \leq 1$$

$$\text{ou } a^2 \leq cb.$$

Le maximum de $\sin A$ est donc 1. Alors A = ... $a^2 = bc$?

Le triangle rectangle ... hauteur $AM = a$ ... $AM^2 = bc$ ... double de la surface du triangle ...

$AM \times a$ ou a^2.

Dans un tube en **U** on verse du mercure qui se tient au même niveau dans les deux branches; on verse ensuite dans l'une d'elles une colonne d'eau de $0^m,1$ de hauteur. De combien le mercure s'abaisse-t-il dans cette branche au dessous du niveau primitif. Densité du mercure = 13,59.

Solution

Soit KL le niveau primitif. Le mercure s'élève de x dans la branche de droite et s'abaisse de x dans la branche de gauche.

On a donc une colonne de mercure de base b et $2x$ de hauteur qui fait équilibre à une colonne d'eau de même base et ayant $0^m,1$ pour hauteur.

Or le poids de la colonne de mercure est

$$b \times 2x \times 13,59$$

Le poids de la colonne d'eau est

$$b \times 0^m,1 \times 1.$$

Et comme le poids de la colonne de mercure est égal à celui de l'eau déplacée on a

$$b \times 2x \times 13,59 = b \times 0^m,1 \times 1$$

D'où $2x \times 13,59 = 0^m,1$

D'où $x = \dfrac{0^m,1}{2 \times 13,59} = 0,00367 = 3^{mm},67$

On veut lester un cylindre en bois de densité [illegible] en lui ajoutant un cylindre de platine de même section, de telle sorte que l'ensemble plonge complètement dans l'eau. Quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine ?
Densité du platine = (21).

Solution

Si nous désignons par h, d, r la hauteur, la densité et le rayon du cylindre en bois et par h', d', r les mêmes éléments du cylindre de platine on a :

Poids du cylindre de bois $= \pi r^2 h d$

Poids du cylindre de platine $= \pi r^2 h' d'$

Poids de l'eau déplacée $= \pi r^2 (h+h') \times 1$.

Mais comme le poids doit être égal à la poussée, pour l'équilibre nous aurons

$$\pi r^2 h d + \pi r^2 h' d' = \pi r^2 (h+h')$$

Divisant par πr^2 il vient

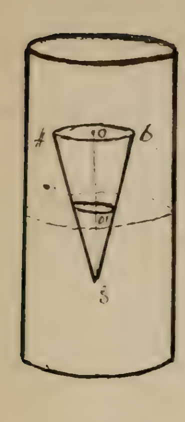
$$hd + h'd' = h + h'.$$

D'où $h'(d'-1) = h(1-d)$

D'où

$$h' = \frac{h(1-d)}{d'-1}$$

Dans un vase contenant du mercure on plonge successivement par le sommet et par la base [illegible] que ce cône soit [illegible] de fer [illegible] de 10 cent. de diamètre et de 5 cent. de hauteur. De combien s'enfoncera le cône dans l'un et l'autre cas?



Solution

Soit SO la hauteur du cône, h' la hauteur SO' de la partie immergée, R et r les rayons des deux cônes, d la densité du fer = 7,79; d' celle du mercure = 13,6.

Le volume du grand cône est

$$\frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Son poids sera $\frac{\pi R^2 h d}{3}$.

Le poids du cône de mercure est

$$\frac{\pi r^2 h' d'}{3}.$$

D'où $\frac{\pi R^2 h d}{3} = \frac{\pi r^2 h' d'}{3}$

D'où $R^2 h d = r^2 h' d'$ d'où $\frac{h'}{h} = \frac{R^2 d}{r^2 d'}$

Mais $\frac{R^2}{r^2} = \frac{h}{h'}$.

D'où $\frac{h'}{h} = \frac{h^2}{h'^2} \times \frac{d}{d'}$ ou $\frac{h'^3}{h^3} = \frac{d}{d'}$.

D'où $\frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{d}}{\sqrt[3]{d'}} = \frac{1,98}{2,38}$. Mais comme $h = 0,05$ on a

$$h' = \frac{1,98 \times 0,05}{2,38} = \frac{0,0990}{2,38} = 0,041.$$

L'aire d'un quadrilatère est égale au produit des deux diagonales multiplié par demi-sinus de leur angle,

Solution

On a $S_{quadri} = AOB + AOC + BOD + DOC$.

Surface $AOB = \frac{AO \times BO \sin A\hat{O}B}{2}$.

— $AOC = \frac{AO \times OC \sin A\hat{O}C}{2}$.

— $BOD = \frac{BO \times OD \sin B\hat{O}D}{2}$.

$DOC = \frac{DO \times OC \sin D\hat{O}C}{2}$.

Donc

$S = \frac{AO \times BO \sin B\hat{O}A}{2} + \frac{AO \times OC \sin A\hat{O}C}{2} + \frac{BO \times OD \sin B\hat{O}D}{2} + \frac{DO \times OC \sin D\hat{O}C}{2}$

Mais $\sin D\hat{O}C = \sin B\hat{O}A$ puisque $D\hat{O}C = B\hat{O}A$. De même $\sin A\hat{O}C = \sin B\hat{O}D$. Donc

$S = \left(\frac{AO \times OB + DO \times OC}{2}\right) \sin B\hat{O}A + \left(\frac{AO \times OC + BO \times OD}{2}\right) \sin A\hat{O}C$.

Mais $\sin B\hat{O}A = \sin A\hat{O}C$ puisque les angles $B\hat{O}A$ et $A\hat{O}C$ sont supplémentaires, donc :

$S = (AO \times OB + DO \times OC + AO \times OC + BO \times OD) \frac{\sin B\hat{O}A}{2}$.

$S = \left(AO(BO + OC) + DO(OC + OB)\right) \frac{\sin B\hat{O}A}{2}$

$S = (BO + OC)(AO + OD) \sin \frac{B\hat{O}A}{2}$.

$S = \frac{AD \times BC \sin B\hat{O}A}{2}$ S est maximum quand $\sin B\hat{O}A$ est maximum, c'est-à-dire quand $\sin B\hat{O}A = 1$ ou quand $B\hat{O}A = 90°$. Le quadrilatère alors est un carré, sa surface est $\frac{AD^2}{2}$.

Deux cercles de rayons a et b sont tangents extérieurement, faire voir que l'angle de leurs tangentes communes extérieures est donné par la formule

$$\sin t = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Solution

Soit $BO = a$; $O'B' = b$. Soit à calculer l'angle BSK.

Les triangles semblables BSO, $B'SO'$ nous donnent:

$$\frac{B'O'}{BO} = \frac{SO'}{SO}. \text{ D'où}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x+a+b}{x} \text{ d'où } \frac{a-b}{b} = \frac{x+a+b-x}{x}.$$

$$\text{D'où } \frac{a-b}{b} = \frac{a+b}{x}. \text{ D'où } x = \frac{b(a+b)}{a-b}.$$

Nous avons maintenant $\sin B'SO' = \dfrac{B'O'}{SO'} = \dfrac{b}{\frac{b(a+b)}{a-b}} = \dfrac{a-b}{a+b}.$

Mais $\sin B'SK = 2\sin B'SO' \cos B'SO'$. (1).

$$\cos^2 B'SO' = 1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{4a\cdot b}{(a+b)^2}.$$

Remplaçant dans (1) $\sin B'SO'$ et $\cos B'SO'$ par leur valeur trouvée, en élevant au carré:

$$\sin^2 BSK = \frac{4(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{16ab(a-b)^2}{(a+b)^4}.$$

En extrayant la racine carrée il vient

$$\sin BSK = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Une droite AB de longueur a est partagée en deux parties AC, BC par un point C. Calculer le minimum de $\overline{AC}^2 + 3\overline{BC}^2$.

Solution

Soit AB = a = ..., AC, BC deux longueurs quelconques dont la somme est a ; soit à trouver le minimum $\overline{AC}^2 + 3\overline{BC}^2$.

Posons AC = x ; CB = a - x. Posons aussi

$$\overline{AC}^2 + 3\overline{BC}^2 = m^2 \quad (1)$$

ou $x^2 + 3\overline{BC}^2 = m^2 \quad (1)'$

x — a - x — C — B

Mais BC = a - x ; $\overline{BC}^2 = (a-x)^2$; d'où

$$x^2 + 3(a-x)^2 = m^2. \text{ D'où}$$

$$x^2 + 3a^2 - 6ax + 3x^2 = m^2.$$

D'où l'équation suivante du 2e

$$4x^2 - 6ax + 3a^2 - m^2 = 0$$

équation qui nous donne

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 12a^2 + 4m^2}}{4}$$

ou $x = \frac{3a \pm \sqrt{4m^2 - 3a^2}}{4}$.

Pour que le problème soit possible il faut qu'on ait $4m^2 - 3a^2 > 0$ ou $4m^2 > 3a^2$; le minimum est donc $\frac{3a^2}{4}$.

Ainsi $x = AC = \frac{3a}{4}$.

$BC = a - x = a - \frac{3a}{4} = \frac{4a - 3a}{4} = \frac{a}{4}$.

Si d'un point donné on mène à un cercle deux sécantes perpendiculaires entre elles, la somme des carrés des cordes est constante.

Solution

Soit A le point donné. ...

$$\overline{BF}^2 + \overline{EC}^2 = \text{constante}$$

Or :

$$\overline{BF}^2 = 4\overline{BM}^2 = 4(R^2 - \overline{OM}^2). \quad \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$$

$$\overline{EC}^2 = 4\overline{NC}^2 = 4(R^2 - \overline{ON}^2); \quad \overline{ON}^2 = \overline{AM}^2$$

$$\overline{BF}^2 + \overline{EC}^2 = 8R^2 - 4(\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2); \quad \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OA}^2$$

d'où $\overline{BF}^2 + \overline{EC}^2 = 8R^2 - 4\overline{OA}^2$ qui est bien constant.

Deux triangles équilatéraux ayant respectivement pour côtés 43,57 et 68,35 ;
Calculer le côté d'un troisième triangle équilatéral dont la surface est égale à celle des deux premiers.

Solution.

Soit $MN = a = 43,57$. $M'N' = b = 68,35$. $M''N'' = x$.

Surf. 1er $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. S. 2e $= \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Surf. 3e $= \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

D'où, d'après l'énoncé

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

D'où $a^2 + b^2 = x^2$; ou $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \sqrt{43,57^2 + 68,55^2} = 80,05.$$

Un corps est tombé dans le vide d'une hauteur de 240m,3156.
Quelle est sa vitesse finale ?

Solution.

On a $e = \frac{1}{2} g t^2$ (1)

$v = gt$ (2).

Nous faut calculer v connaissant $g = 9,8088$

$e = 240,3156$.

De (2) nous tirons

$t = \frac{v}{g}$; $t^2 = \frac{v^2}{g^2}$;

Portant dans (1) cette valeur de t^2 il vient :

$e = \frac{g v^2}{2 g^2} = \frac{v^2}{2g}$.

D'où remplaçant e et g par leurs valeurs

$240,3156 = \frac{v^2}{2 \times 9,8088}$

D'où

$v^2 = 240,3156 \times 2 \times 9,8088$

ou $v^2 = 4714,415$.

D'où $v = \sqrt{4714,415} = 68^m,66$.

Étant donné AI = a ; BK = b. Trouver la direction de AB perpendiculaire pour que l'angle APB soit maximum.

Solution.

APB est maximum en même temps que celui de sa tangente.

$$\operatorname{tg} A\hat{P}B = \operatorname{tg}(A\hat{P}I - B\hat{P}K) = \frac{\operatorname{tg} A\hat{P}I - \operatorname{tg} B\hat{P}K}{1 + \operatorname{tg} A\hat{P}I \operatorname{tg} B\hat{P}K}.$$

Mais $\operatorname{tg} A\hat{P}I = \frac{x}{a}$. $\operatorname{tg} B\hat{P}K = \frac{x}{b}$.

$$\operatorname{tg} A\hat{P}B = \frac{\frac{x}{a} - \frac{x}{b}}{1 + \frac{x^2}{ba}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ba}.$$

Posant $\frac{x(b-a)}{x^2+ba} = m$ il vient

$$mx^2 - (b-a)x + abm = 0$$

D'où $x = \frac{b-a \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4abm^2}}{2m}$

Pour que le problème soit possible il faut qu'on ait :

$(b-a)^2 - 4abm^2 > 0$

ou $4abm^2 < (b-a)^2$

ou $m^2 < \frac{(b-a)^2}{4ab}$. $m \leq \frac{(b-a)}{2\sqrt{ab}}$.

Le maximum de m est donc $m = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

Alors $x = \frac{b-a}{2\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}} = \sqrt{ab}$ moyenne proportionnelle qu'on porte à droite et à gauche du I point.

Étant donné un triangle obliquangle quelconque ABC dans lequel AC = b = 117,28 ; BC = a = 89,214 ; $\hat{C}$ = 67° 18' 20" partager ce triangle en deux parties équivalentes par la ligne MP perpendiculaire à AB. Calculer AM = x.

Solution.

Surface AMP = $\dfrac{x^2 \sin 2A}{4}$

D'après l'énoncé nous avons

$$x^2 \sin 2A = ab \sin C \quad (1).$$

Tous calculs faits on trouve

$$2A = 132° \; 23' \; 36''$$

D'où de l'équation (1) nous tirons

$$\log x = \log a + \log b + \log \sin C - \log \sin 2A.$$

$$\log a = 1,95843$$

$$\log b = 2,06924$$

$$\log \sin C = \bar{1},77163$$

$$-\log \sin 2A = 0,13297$$

$$2 \log x = 3,90141$$

D'où x = 76,[illegible]

Quelle dette A peut on éteindre en 3 ans avec une annuité de 9261 versée chaque année. L'intérêt étant 5.

Solution.

La formule des annuités est

$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}.$$

Si dans cette formule nous faisons $a = 9261$, $n = 3$, $r = 0,05$

il vient $A = \dfrac{9261\left[(1,05)^3 - 1\right]}{0,05 \times (1,05)^3}$.

$3 \log 1,05 = 0,06357$ correspondant à $1,157625$.

D'où $A = \dfrac{9261 \times 0,157625}{0,05 \times 1,157625}$

$\log A = \log 9261 + \log 0,157625 - \log 0,05 - \log 1,157625$

D'où

$$\log 9261 = 3,96666$$
$$\log 0,157625 = \bar{1},19762$$
$$-\log 0,05 = 1,30103$$
$$-\log 1,157625 = \bar{1},93643$$
$$\log A = 4,40174$$

D'où remontant du logarithme au nombre

$A = 25220.$

Prouver que les deux équations
$x^2+px+q=0$; $ax^2+p(a+b)x+q(a+2b)=0$
ont une racine commune quand les racines de la première sont égales.

Solution.

Désignant par x' la racine commune, par x'' et x''' les deux autres on a

(1) $x'+x''=-p$ (3) $x'+x'''=\frac{-p(a+b)}{a}$

(2) $x'x''=q$ (4) $x'x'''=\frac{q(a+2b)}{a}$.

Retranchant (3) de (1) on a

$x''-x'''=\frac{-pa+pa+pb}{a}=\frac{pb}{a}$ (5).

Divisant (2) par (4) il vient $\frac{x''}{x'''}=\frac{q}{\frac{q(a+2b)}{a}}$ (6)

De cette dernière on tire $x'''=\frac{qx''(a+2b)}{aq}=\frac{x''(a+2b)}{a}$.

Portant cette valeur dans (5) il vient:

$x''-\frac{x''(a+2b)}{a}=\frac{pb}{a}$.

D'où $ax''-ax''-2bx''=pb$.

D'où $-2bx''=pb$. D'où $x''=\frac{-pb}{2b}=-\frac{p}{2}$.

Or, c'est précisément là une des racines de l'équation $x^2+px+q=0$ quand les racines de celle-ci sont égales.

Trouver un nombre dont le cube soit égal à 1.

Solution.

Soit x ce nombre nous aurons aussi:

$x^3 = 1$ ou

$$x^3 - 1 = 0 \quad (1).$$

Mais $x^3 - 1$ est divisible par $x-1$. Le quotient est

$$x^2 + x + 1.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0. \quad (2)$$

Or, pour que un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.

Nous satisferons donc à l'équation (2) en posant

$$x - 1 = 0. \text{ D'où } x = 1.$$

et $x^2 + x + 1 = 0.$

D'où $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Les deux dernières valeurs sont imaginaires

et les trois racines de l'unité sont:

$x' = 1;\ x'' = \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};\ x''' = \frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$

Pour quelles valeurs de x le trinôme

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

prend-il des valeurs positives ou négatives ?

Solution.

Résolvant le trinôme on a

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$$

D'où $x' = 7$; $x'' = 5$.

Le trinôme peut donc s'écrire

$$(x - 5)(x - 7).$$

Il suffit donc de résoudre l'inégalité

$(x - 5)(x - 7) > 0$ pour connaître les valeurs positives. Le trinôme sera positif ou en d'autres termes l'inégalité sera satisfaite pour les valeurs de x s'étendant de $-\infty$ à 5 et de 7 à $+\infty$.

Il sera négatif ou l'inégalité sera plus petite que 0 c'est-à-dire que

$$(x - 5)(x - 7) < 0$$

quand les valeurs de x seront comprises entre

5 et 7.

On construit sur les côtés AB, BC d'un triangle ABC, les parallélogrammes quelconques ABFR, BCDS, on prolonge RF et LD jusqu'en O, et on tire OB; enfin on construit sur AC un parallélogramme dont le côté adjacent est égal et parallèle à OB. Démontrer que ce parallélogramme est équivalent à la somme des deux autres.

Solution.

Soit ABC le triangle en question, ACHG, BLCD, BFR les parallélogrammes construits sur les côtés AC, BC et BA, il s'agit de démontrer que ACHG = BLCS + ABFR.

Prolongeons OB jusqu'en K. Comme d'après l'énoncé OK parallèle et égale à AG et à CH prolongeons AG jusqu'en R on aura RA = OB.

On aura de même en prolongeant CH CS = OB = RA.

On aura B'G = BA; B'H = BC comme parallèles comprises entre parallèles, en menant B'G parallèle à BA et B'H parallèle à CB.

Les triangles ABC et B'HG sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Puisque GB' = BA. Or RA = AG = BB' = CH = OB il s'ensuit

que les parallélogrammes RBB'G et ABFR sont sur une même

le parallélogramme CFSE = CHGK.

Mais le parallélogramme KCAB = FKBA car AK = KF = KC,

et, si de FC nous retranchons KC il reste FK.

Si de même de KC, retranchant le côté KC il reste FC. Donc

FC = FK mais AK = KC. Les triangles RKA, FOB sont

donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux

chacun à chacun.

Si du trapèze AKCB nous retranchons le triangle RKA

il reste KCAK, si nous retranchons de AKCB le triangle

FCB il reste KBFA. Comme les triangles RKA, FCB

sont égaux on a KBFA = KCAK.

On démontrerait de même que BACE = CFSE.

Donc FKAB + BACE = KBAE + BACH = FABH + [illegible] = EACH.

C'est ce que nous voulions établir dans cette hypothèse. En [illegible]

[illegible] CS = CH - AG = EA [illegible]

[illegible]

$BC^2 + BA^2 = CA^2$.

[illegible] BA [illegible] ... en fonction de OD

Solution

Soit $OC = R$.

$$\text{Vol } BCA = \text{Vol } BDOA - \text{Vol } DCOA. \quad (1)$$

$$\text{Vol. } BDOA = \pi R^2 \times BA.$$

$$\text{Vol } DCOA = \frac{\pi BA}{2}\left(R^2 + \overline{DC}^2\right) + \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}. \quad (2)$$

Portant dans (1) ces valeurs de BDOA et de DCOA on a

$$\text{Vol } BCA = \pi R^2 \times BA - \frac{\pi R^2 \times BA}{2} - \frac{\pi BA \times \overline{DC}^2}{2} - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}.$$

D'où encore

$$\text{Vol } BCA = \frac{\pi R^2 \times BA}{2} - \frac{\pi BA \times \overline{DC}^2}{2} - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}.$$

D'où

$$\text{Vol. } BCA = \frac{\pi BA}{2}\left(R^2 - \overline{DC}^2\right) - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}. \quad (3)$$

Mais $R^2 - \overline{DC}^2 = \overline{OD}^2 = \overline{BA}^2$.

D'où portant dans (3) cette valeur de $R^2 - \overline{DC}^2$ on a

$$\text{Vol. } BCA = \frac{\pi BA}{2} \times \overline{BA}^2 - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}$$

ou $\text{Vol } BCA = \frac{\pi \overline{BA}^3}{2} - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6} = \frac{3\pi \overline{BA}^3}{6} - \frac{\pi \overline{BA}^3}{6}$

$$= \frac{2\pi \overline{BA}^3}{6}.$$

Calculer les 3 côtés d'un triangle [illegible] la surface S et le périmètre P.

[illegible]

[illegible]

$$x+y+z = P \ (1)$$

$$xy = 2S \ (2)$$

$$x^2+y^2 = z^2 \ (3)$$

De (1) nous tirons $x+y = P-z$.

Élevant cette égalité au carré il vient

$$(x+y)^2 = P^2+z^2-2Pz.$$

Remplaçant dans cette [illegible] x^2+y^2 par z^2 et $2xy$ par $4S$, il vient

$$z^2+4S = P^2+z^2-2Pz.$$

D'où $4S = P^2-2Pz$; d'où $z = \frac{P^2-4S}{2P}$.

Pour que z soit positif il faut que les deux termes de la fraction $\frac{P^2-4S}{2P}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

qu'on ait : $P^2-4S>0$; ou $P^2>4S$. Le minimum de P [illegible]

[illegible]

[illegible]

$x^2-[illegible]+[illegible]=0$ ou $x^2-x[illegible]+[illegible]=0$ [illegible] $P^2-\sqrt{P^4-[illegible]}$

Dans un triangle le point de concours des médianes se trouve aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet ou à $1/3$ à partir [illegible]

Solution

Soit ABC le triangle en question:

AF, BE, CD les trois médianes. Je dis qu'elles se coupent en un même point O situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

Je prends MB = MC, et AN = NO. Je joins EF et NM.

Les deux triangles MNO, EOF sont égaux, car MN dans le triangle AOB passant par le milieu des côtés OA, OB est égale à 1/2 AB et elle est parallèle à cette ligne. De même EF, dans le triangle ABC est égale à 1/2 AB. Donc EF = MN. EF est aussi parallèle à AB donc les lignes EF et MN sont parallèles entre elles.

Donc l'angle MNO = NFE comme alternes internes. NME = MEF par la même raison. Donc les deux triangles EOF et NOM sont égaux. Donc OF = ON et comme NO = AN on a AF = 3OF. OF = $\frac{AF}{3}$.

Le théorème est donc démontré. On démontrerait de même pour toutes les autres médianes.

Connaissant dans un rectangle [illegible] calculer les deux côtés x, y [illegible] le maximum de p.

Solution

Soit AC $= d$ AB $= x$; CB $= y$. On a

$$x + y = p \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = d^2 \quad (2)$$

C d y A x B

Elevant (1) au carré il vient

$$(x+y)^2 = p^2 \quad (3)$$

Retranchant (2) de (3) on a

$$2xy = p^2 - d^2. \quad \text{Mais } y = p - x.$$

Donc $2x(p - x) = p^2 - d^2$.

D'où $\quad 2x^2 - 2xp - d^2 + p^2 = 0.$

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 2d^2 - 2p^2}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{2d^2 - p^2}}{2}.$$

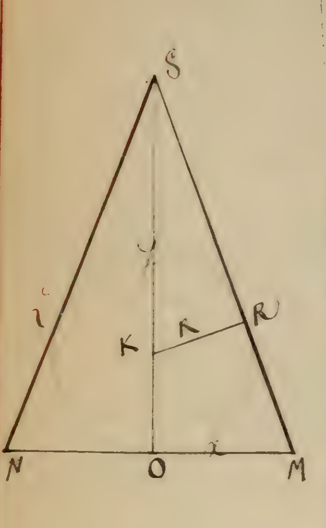
Pour que le problème soit possible il faut que l'on ait: $2d^2 - p^2 > 0$; ou $p^2 < 2d^2$.

Le maximum de p^2 est donc $2d^2$. Alors $p = d\sqrt{2}$ [illegible] $x = y = \frac{p}{2}$ et le rectangle est un carré.

[illegible] $x = \frac{p \pm \sqrt{2d^2 - p^2}}{2}$

$$y = p - \frac{p \pm \sqrt{2d^2 - p^2}}{2} = \frac{p \mp \sqrt{2d^2 - p^2}}{2}$$

[illegible]



Chercher le maximum du rapport de la surface totale d'un cône au grand cercle de la sphère inscrite.

Solution.

Soit $SK = y$; $KR = R$; $OM = OM' = x$; $SM = z$.

Égalant au rapport $\frac{\pi x^2 + \pi x z}{\pi R^2}$ [illegible]

ôté le facteur constant π puisque nous cherchons un maximum, il vient

$$x(x+z) = mR^2 \quad (1).$$

Mais $\frac{SM}{SK} = \frac{OM}{RK} = \frac{SO}{SR}$ ou $\frac{z}{y} = \frac{x}{R} = \frac{R+y}{\sqrt{y^2-R^2}}$.

D'où $x = \frac{R(R+y)}{\sqrt{y^2-R^2}} = R\sqrt{\frac{(R+y)^2}{y^2-R^2}} = R\sqrt{\frac{(R+y)(R+y)}{(y+R)(y-R)}} = R\sqrt{\frac{R+y}{y-R}}$

On a ensuite $\frac{z+x}{y+R} = \frac{x}{R}$; ou $z+x = \frac{x}{R}(y+R)$.

Portant dans (1) ces valeurs de $x+z$ et de x il vient :

$$R\sqrt{\frac{R+y}{y-R}} \times \frac{x}{R}(y+R) = mR^2$$

ou $$\sqrt{\frac{R+y}{y-R}}\sqrt{\frac{R+y}{y-R}}(y+R) = mR^2$$

D'où $$y^2 + Ry(2-mR) + R^2 + mR^3 = 0$$

D'où $$y = \frac{R(mR-2) \pm \sqrt{m^2R^4 - 8mR^3}}{2}$$

Pour que le problème soit possible il faut qu'on ait

$m^2R^4 - 8mR^3 > 0$ ou $mR > 8$ ou $m > \frac{8}{R}$. Le maximum de m est donc $\frac{8}{R}$. Alors $y = \frac{R\left(R\frac{8}{R} - 2\right)}{2}$

$= \frac{R(8-2)}{2} = 3R.$

$$x = R\sqrt{2} \; ; \; z = 3R\sqrt{2}.$$

Résoudre l'équation

$$x^4+4x^3+4x+1=\frac{57}{4}x^2.$$

Solution.

Je puis écrire cette équation, en divisant les deux membres par x^2.

$$x^2+4x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{57}{4}=0.$$

Soit $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{57}{4}=0.$

Posant $x+\frac{1}{x}=y$, j'ai $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$

D'où

$$y^2-2+4y-\frac{57}{4}=0.$$

D'où $4y^2+16y-65=0.$

$$y=\frac{-8\pm\sqrt{64+260}}{4}=\frac{-8\pm18}{4}=\frac{-4\pm9}{2};\ y'=\frac{5}{2};\ y''=-\frac{13}{2}.$$

On a donc d'abord $y=\frac{5}{2}$ ou

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ ou $2x^2-5x+2=0$; $x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$
$=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm3}{4}.$

D'où $x'=\frac{8}{4}=2,\ x''=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Soit maintenant $y=-\frac{13}{2}$. On a $x+\frac{1}{x}+\frac{13}{2}=0$

ou $2x^2+13x+2=0$. D'où $x=\frac{-13\pm\sqrt{169-16}}{4}=\frac{-13\pm\sqrt{153}}{4}$

On a donc les 4 valeurs :

$$x'=2;\ x''=\frac{1}{2};\ x'''=\frac{-13+\sqrt{153}}{4};\ x''''=\frac{-13-\sqrt{153}}{4}$$

2ème équation

$$60 - 4\sqrt{x^2+x+6} = x^2+x+6.$$

Solution

Je pose $\sqrt{x^2+x+6} = y$.

J'aurai ainsi $x^2+x+6 = y^2$ et l'équation s'écrira

$$60 - 4y = y^2; \text{ ou}$$

$$y^2+4y-60=0$$

$$y = -2 \pm \sqrt{4+60} = -2 \pm \sqrt{64} = -2 \pm 8.$$

Donc $y' = 6$, $y'' = -10$.

Soit d'abord $y = 6$, $y^2 = 36$, on a

$$x^2+x+6 = 36.$$

$$x^2+x-30=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}, \; x' = 5, \; x'' = \frac{-12}{2} = -6.$$

Soit maintenant $y = -10$; $y^2 = 100$ on a

$$x^2+x+6 = 100$$

$$\text{ou } x^2+x-94=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+376}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}$$

Les quatre racines sont donc:

$x' = 5$ | $x''' = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}$; Donc x''

$x'' = -6$ | $x'''' = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}$;

Résoudre l'équation.

$$x+4+\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{12}{x-4}$$

Solution

Réduisant au même dénominateur il vient:

$$(x^2-16)\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4}\,(x-4) = 12\sqrt{x-4}.$$

D'où

$$(x^2-16)\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4}\,\sqrt{x-4}\,\sqrt{x-4} = 12\sqrt{x-4}.$$

Divisant les deux membres par $\sqrt{x-4}$ il vient

$$x^2-16+\sqrt{x^2-16} = 12.$$

Posant $\sqrt{x^2-16} = y$ il vient

$$y^2+y-12=0$$

$$y = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm 7}{2} \qquad y'=3 \quad y''=-4.$$

Si $y=3$ on a

$x^2-16=9$: d'où $x^2=25$; $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5.$

Si $y=-4$ il vient

$x^2-16=16.$

D'où $x^2=32$; $x=\pm\sqrt{32}=\pm\sqrt{16}\times\sqrt{2}=\pm 4\sqrt{2}.$

Les quatre valeurs de x sont donc.

Pour y' $\begin{cases} x'=+5 \\ x''=-5 \end{cases}$ Pour y'' $\begin{cases} x'''=+4\sqrt{2} \\ x''''=-4\sqrt{2} \end{cases}$

Étant donné un rectangle [illegible] les triangles [illegible] EAB, BKD, KOC, CFA. [illegible] la surface totale EFKC.

Solution

Soit $AB = DC = 2x$; $BD = AC = 2y$; $CB = 2a$, EAB, BKD, KOC, CFA les quatre triangles rectangles [illegible] minimum de la surface totale EFKO.

Les deux triangles rectangles EAB, COD sont égaux comme ayant les hypoténuses BA, CD égales et l'angle $\widehat{EBA} = \widehat{EAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = 45°$.

Les deux triangles rectangles KBD, AFC sont aussi égaux par la même raison.

On a surface $AEB = \frac{EA \times EB}{2} = \frac{\overline{EA}^2}{2}$.

On a aussi surface $AFC = \frac{AF \times FC}{2} = \frac{\overline{AF}^2}{2}$.

Mais $4x^2 = 2\overline{EA}^2$; donc $\overline{EA}^2 = 2x^2$. D'où $x^2 =$ surface AEB.

On verrait de même que $y^2 =$ surface AFC.

La surface du rectangle est $4xy$. La surface totale [illegible]

$2x^2 + 2y^2 + 4xy$. [illegible]

$2x^2 + 2y^2$ [illegible] $2m^2$ [illegible]

$x^2 + y^2$ [illegible] m^2 (2)

Mais $4y^2 = 4a^2 - 4x^2$ [illegible]

$4x(a^2x^2$ [illegible] $= m^2$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $= 0$ (4)

D'où $x^2 = \frac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 + 8m^2a^2 - 4m^4 - 4a^4}}{4}$

$= \frac{2a^2 \pm \sqrt{8m^2a^2 - 4m^4}}{4}$

Pour que [illegible] il faut [illegible]

$8m^2a^2 - 4m^4$ [illegible]

[illegible] m^2 est donc $2a^2$ [illegible] $\frac{2a^2}{4}$ [illegible]

[illegible] rectangle [illegible]

[illegible]

pour $m^4 + 4a^4 - 2m^2a^2 = 0$ [illegible]

[illegible] $m^2 = 2m^2a^2$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

Résoudre l'équation

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Solution

Divisant par x^2 les deux termes de cette équation on peut l'écrire :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0.$$

Posant $x + \frac{1}{x} = y$, on a $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, il vient

$$y^2 - 2 - 3y - 2 = 0, \text{ ou}$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

D'où $y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$, $y' = \frac{8}{2}$; $y'' = -1$.

Soit d'abord $y = \frac{8}{2} = 4$ on a

$x + \frac{1}{x} = 4$ d'où $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Soit maintenant $y = -1$ il vient

$x + \frac{1}{x} = -1$ d'où

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

On a donc pour x les quatre valeurs

$x' = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $x''' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

$x'' = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ $x'''' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

Résoudre l'équation

$$x^2 - 2x + 6\sqrt{x^2-2x+5} = 11.$$

Solution.

En ajoutant 5 à chacun de ses membres on peut écrire cette équation

$$x^2 - 2x + 5 + 6\sqrt{x^2-2x+5} = 16.$$

Posant $\sqrt{x^2-2x+5} = y$ l'équation devient

$y^2 + 6y = 16$

ou $y^2 + 6y - 16 = 0$

D'où $y = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5$; $y = 2$; $y = -8$.

Soit d'abord $y = 2$ on a

$x^2 - 2x + 5 = 4$, ou

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$x = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$. $x = 1$. $x' = 1$.

Soit $y = -8$ on a

$x^2 - 2x + 5 = 64$ ou

$x^2 - 2x - 59 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1+59} = 1 \pm \sqrt{4}\sqrt{15} = 1 \pm 2\sqrt{15}$.

Les quatre valeurs de x sont donc :

$x = 1$ $\quad x'' = 1 + 2\sqrt{15}$

$x' = 1$ $\quad x''' = 1 - 2\sqrt{15}$

Résoudre l'équation

$$x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5x}{2} + 1 = 0$$

Solution.

Divisant les deux membres de cette équation par x^2 on peut l'écrire

$$x^2 - \frac{5x}{2} + 2 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

ou $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

Posant $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ il vient :

$$y^2 - 2 - \frac{5y}{2} + 2 = 0$$

$$2y^2 - 5y = 0 \quad \text{ou} \quad y(2y - 5) = 0 \quad (1)$$

Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des deux facteurs soit nul. Nous satisferons donc à l'équation (1) en posant $y = 0$ et $2y - 5 = 0$ ou $y = \frac{5}{2}$.

Quand $y = 0$ on a

$$x + \frac{1}{x} = 0 \text{ ; d'où } x^2 + 1 = 0$$

D'où $x^2 = -1$ et $x = \pm\sqrt{-1}$.

Quand $y = \frac{5}{2}$ on a $2x^2 - 5x + 2 = 0$ d'où $x = \frac{5 \pm 3}{4}$ d'où $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$

Les quatre valeurs de x sont donc

$x' = +\sqrt{-1}$ $\qquad x''' = 2$

$x'' = -\sqrt{-1}$ $\qquad x'''' = \frac{1}{2}$.

[illegible] les deux inégalités

$$6x^2-7x+2<0$$
$$12x^2-17x+6>0.$$

Solutions.

1° Soit $6x^2-7x+2<0$.

Les racines du trinôme sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$. On a

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)<0.$$

Comme nous avons ici <0, les seules valeurs de x qui conviennent à cette inégalité sont comprises entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$. D'où, on doit avoir $x>\frac{1}{2}$; $x<\frac{2}{3}$.

II. Soit $12x^2-17x+6>0$.

Les racines du trinôme sont $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$. On a donc

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0.$$

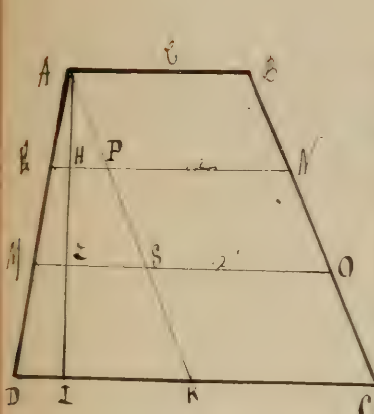
Pour que cette inégalité soit satisfaite, il ne faut pas que x soit compris dans l'intervalle des racines. Les valeurs qui satisfont cette inégalité s'étendent de $-\infty$ à $\frac{2}{3}$ et de $+\frac{3}{4}$ à $+\infty$.

$-\infty$ [illegible] $\frac{2}{3}$.

D'où les seules valeurs de x sont :

$>\frac{3}{4}$ et $<\frac{2}{3}$.

Étant donné un trapèze ABCD on divise AD en 3 parties égales par les parallèles MO, EN à DC et à AB. Calculer la surface des trois trapèzes partiels connaissant dans le trapèze total la hauteur et les deux bases.



Solution

Soit $AB = b$; $DC = a$; $AI = h$; $EN = x$; $MO = x'$; $MD = \frac{AD}{3}$ $OC = \frac{BC}{3}$.

$$\text{Surface } AEBN = \left(\frac{b+x}{2}\right) AH.$$

On a $\frac{AH}{AI} = \frac{AE}{AD}$ ou $\frac{AH}{h} = \frac{\frac{AD}{3}}{AD}$; $\frac{AH}{h} = \frac{1}{3}$; $AH = \frac{h}{3}$.

D'où Surface $AEBN = \left(\frac{b+x}{2}\right)\frac{h}{3}$.

On a aussi $\frac{EP}{DK} = \frac{AE}{AD}$; $\frac{x-b}{a-b} = \frac{1}{3}$; ou $x = \frac{2b+a}{3}$.

D'où Surface $AEBN = \left(\frac{b+\frac{2b+a}{3}}{2}\right)\frac{h}{3}$

$= \left(\frac{3b+2b+a}{6}\right)\frac{h}{3} = \left(\frac{5b+a}{18}\right)h.$

On a maintenant Surf. $EMNO = \left(\frac{x+x'}{2}\right) HZ = \left(\frac{x+x'}{2}\right)\frac{h}{3}$.

$= \left(\frac{\frac{2b+a}{3}+x'}{2}\right)\frac{h}{3}$

On a $\frac{MS}{KD} = \frac{MA}{DA} = \frac{2}{3}$. $\frac{x'-b}{a-b} = \frac{2}{3}$; $x' = \frac{2a+b}{3}$.

D'où Surface $EMNO = \left(\frac{\frac{2b+a}{3}+\frac{2a+b}{3}}{2}\right)\frac{h}{3} = \left(\frac{\frac{3b+3a}{3}}{2}\right)\frac{h}{3}$

$= \frac{(b+a)h}{6}.$

On a Surface $MOCD = \left(\frac{x'+a}{2}\right) ZI = \left(\frac{x'+a}{2}\right)\frac{h}{3}$.

Nous avons vu que $x' = \frac{2a+b}{3}$.

D'où

$$S.MOCD = \left(\frac{\frac{2a+b}{3}+a}{2}\right)\frac{h}{3} = \left(\frac{\frac{2a+b+3a}{3}}{2}\right)\frac{h}{3} = \left(\frac{5a+b}{18}\right)h.$$

Trouver les valeurs entières de x satisfaisant à l'inégalité

$$x^2 < 10x - 16.$$

Solution

L'inégalité $x^2 < 10x - 16$ peut s'écrire

$$x^2 - 10x + 16 < 0.$$

Si $x^2 - 10x + 16 = 0$

les racines de x sont 8 et 2.

On doit donc avoir

$$(x - 8)(x - 2) < 0.$$

Comme nous avons ici une inégalité plus petite que zéro les seules valeurs de x qui satisfont cette inégalité sont comprises

entre 8 et 2

ou entre 2 et 8

et les valeurs correspondantes

$$x = 6$$

sont donc

3, 4, 5, 6, 7.

Étant donné un cercle de rayon R, deux tangentes ACO, CBO faisant entre elles un angle de 40°. Calculer la surface AMCB.

Solution

Soit AC = CB = 1. $A\hat{C}B = 40$. $A\hat{C}O = O\hat{C}B = 20°$. $A\hat{O}C = B\hat{O}C = 70$

Or

Surface AMCB = surface AOBC − surface AMOB.

Surface AOC $= \dfrac{AC \times AO}{2} = \dfrac{AC}{2}$

puisque nous avons AO = 1.

Donc surface AOBC $= 2 \times \dfrac{AC}{2} = AC$.

Le triangle ACO nous donne

AC = AO tg 70 = tg 70 × 1 = tg 70.

Secteur AOMB $= \dfrac{\pi R^2 \, AMB}{360} = \dfrac{\pi \, AMB}{360} = \dfrac{\pi 140}{360} = \dfrac{\pi 7}{18}$.

Surface ACBO = tg 70.

Log tg 70 = 0,43893. tg 70 = 2,747477.

Secteur AMOB $= \dfrac{7 \times 3{,}1416}{18} = \dfrac{21{,}9912}{18} = 1{,}221733$.

Donc surface AMCB = surface AOBC − surface AMOB

Surface AOBC = 2,747477

− surface AMOB = 1,221733

surface AMCB = 1,525744.

Résoudre l'équation ou le système

$$\begin{cases} a^x b^y = c & (1) \\ my = nx & (2) \end{cases}$$

Solution.

De (1) nous tirons

$$x \log a + y \log b = \log c$$

nous n'avons donc plus qu'à résoudre le système

$$x \log a + y \log b = \log c \quad (3)$$

$$my = nx \quad (4).$$

De (4) nous tirons $y = \frac{nx}{m}$.

Portant dans (3) cette valeur il vient

$$x(m \log a + n \log b) = m \log c.$$

D'où $x = \frac{m \log c}{m \log a + n \log b}$.

De (4) on tire aussi $x = \frac{my}{n}$.

Substituant dans (3) il vient

$$\frac{my \log a}{n} + y \log b = \log c \text{ d'où}$$

$$my \log a + ny \log b = n \log c$$

D'où $y(m \log a + n \log b) = n \log c$

D'où enfin

$$y = \frac{n \log c}{m \log a + n \log b}.$$

On donne une circonférence de diamètre AB. Par le point A mener une corde AC telle que si l'on fait tourner la figure autour de AB la zone engendrée par l'arc soit dans un rapport donné $m:n$ ou $\frac{m}{n}$ avec la surface du cône engendré par AC.

Solution

Soit $AD = x$, $AO = R$, $DO = R - x$.

Zone $ACE = 2\pi\, AO \times AD = 2\pi R x$.

Surface cône $ACD = \pi\, AC \times DC$.

$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{DO}^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2$. D'où $CD = \sqrt{2Rx - x^2}$

Le triangle ACD nous donne

$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$; ou $\overline{AC}^2 = 2Rx - x^2 + x^2 = 2Rx$.

D'où Surface latérale cône $ACD = \pi \sqrt{2Rx}\sqrt{2Rx - x^2}$.

On a donc d'après l'énoncé

$$\frac{\text{surface zone } AC}{\text{surf. lat. cône } ACE} = \frac{2\pi R x}{\pi\sqrt{2Rx}\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{m}{n}$$

D'où $$\frac{2Rx}{\sqrt{2Rx}\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{m}{n}$$

Réduisant au même dénominateur on a

$2Rxn = m\sqrt{2Rx}\sqrt{2Rx - x^2}$. Élevant au carré on a

$$2Rn^2 = 2Rm^2 - m^2 Rx.$$

D'où $m^2 Rx = 2Rm^2 - 2Rn^2 = 2R(m^2 - n^2)$

D'où $$x = \frac{2R(m^2 - n^2)}{m^2 R} = \frac{2(m^2 - n^2)}{m^2} = \frac{2(m+n)(m-n)}{m^2}.$$

Résoudre l'équation

$$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Solution

Divisant les deux membres par x^2 cette équation devient

$$2x^2 - 5x^2 + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

ou $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$

Posant $x + \frac{1}{x} = y$ il vient

$$2y^2 - 4 - 5y + 6 = 0.$$

D'où $2y^2 - 5y + 2 = 0$

D'où $y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, $y' = 2$, $y'' = \frac{1}{2}$.

Si $y = 2$ on a

$$x + \frac{1}{x} = 2.$$

D'où $x^2 - 2x + 1 = 0$.

D'où $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1.$

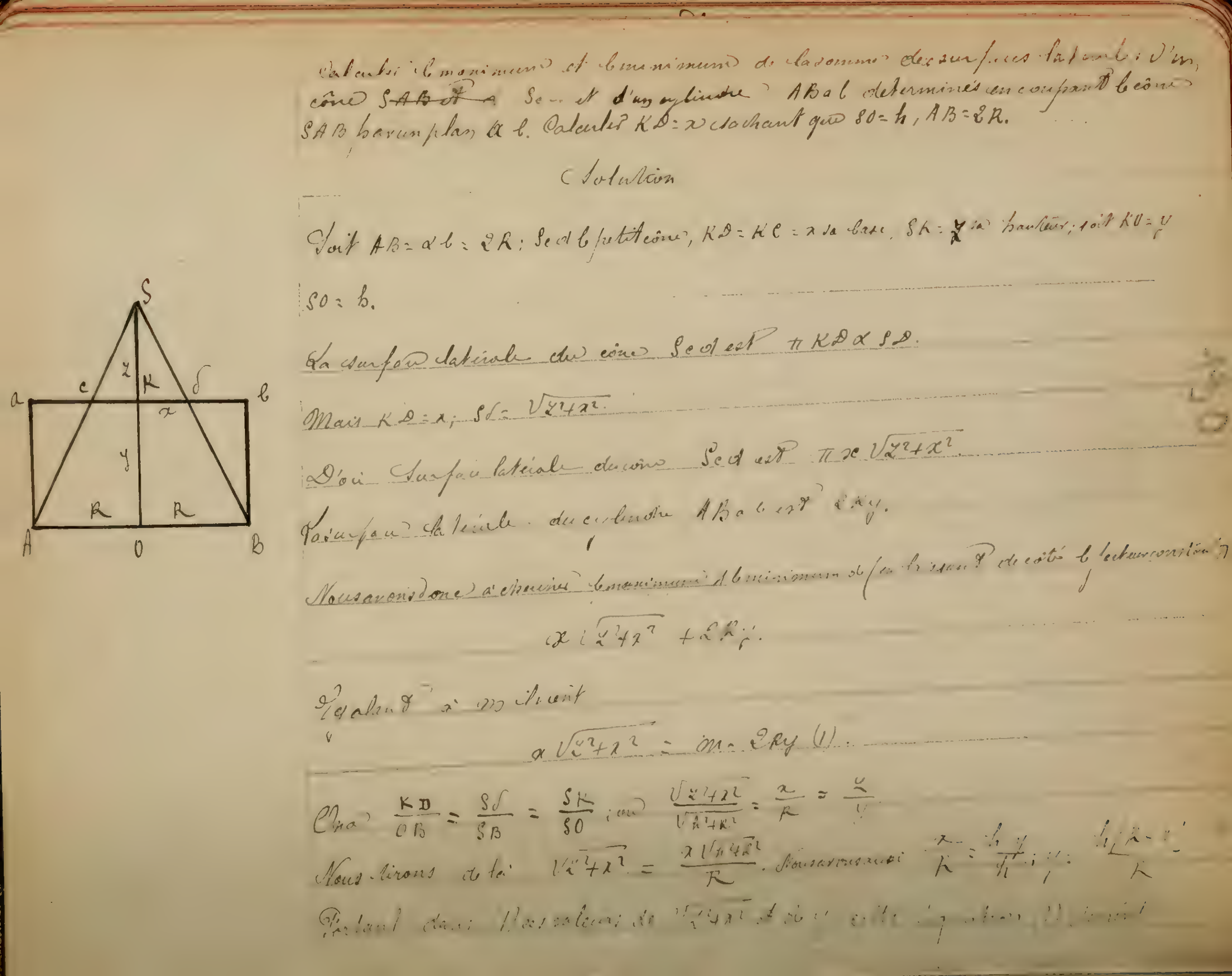
Si $y = \frac{1}{2}$ on a

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

ou $2x^2 - x + 2 = 0$ et $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}$

Les quatre valeurs de x sont donc

$x' = 1$, $x'' = 1$, $x''' = \frac{1 + \sqrt{-15}}{4}$, $x'''' = \frac{1 - \sqrt{-15}}{4}$



Calculer le maximum et le minimum de la somme des surfaces latérales d'un cône S~~AB~~.. Sc.. et d'un cylindre ABab déterminés en coupant le cône SAB par un plan ab. Calculer KD = x sachant que SO = h, AB = $2R$.

Solution

Soit AB = ab = $2R$; Scd le petit cône, KD = KC = x sa base, SK = z sa hauteur ; soit KO = y

SO = h.

La surface latérale du cône Scd est $\pi\, KD \times SD$.

Mais KD = x ; SD = $\sqrt{z^2+x^2}$.

D'où surface latérale du cône Scd est $\pi x \sqrt{z^2+x^2}$.

La surface latérale du cylindre ABab est $2Ry$.

Nous avons donc à chercher le maximum et le minimum de (en laissant de côté le facteur constant π)

$$x\sqrt{z^2+x^2} + 2Ry.$$

Égalant à m il vient

$$x\sqrt{z^2+x^2} = m - 2Ry \quad (1).$$

On a $\frac{KD}{OB} = \frac{SD}{SB} = \frac{SK}{SO}$ ou $\frac{\sqrt{z^2+x^2}}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{x}{R} = \frac{z}{h}$

Nous tirons de là $\sqrt{z^2+x^2} = \frac{x\sqrt{h^2+R^2}}{R}$. Nous avons aussi $\frac{x}{R} = \frac{h-y}{h}$; d'où $y = \frac{h(R-x)}{R}$

Portant dans l'équation les valeurs de $\sqrt{z^2+x^2}$ et de y cette équation (1) devient

$$\frac{x^2\sqrt{h^2+R^2}}{R} = m - 2h(R-x)$$

D'où $x^2\sqrt{h^2+R^2} = mR - 2R^2h + 2hRx$.

D'où $x^2\sqrt{h^2+R^2} - 2Rhx + 2R^2h - mR = 0$. (2)

D'où
$$x = \frac{Rh \pm \sqrt{R^2h^2 - 2R^2h\sqrt{h^2+R^2} + mR\sqrt{h^2+R^2}}}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$mR\sqrt{h^2+R^2} + R^2h^2 - 2R^2h\sqrt{h^2+R^2} > 0$$

ou $m\sqrt{h^2+R^2} > Rh(2\sqrt{h^2+R^2} - h)$.

Le minimum de m est donc $m = \dfrac{Rh(2\sqrt{h^2+R^2} - h)}{\sqrt{h^2+R^2}}$.

Alors nous avons $x = \dfrac{Rh}{\sqrt{h^2+R^2}}$ et $= h(\sqrt{h^2+R^2} - h)$.

Il faut encore que x soit [illegible]

soit $mR < 2R^2h$ ou $m < 2Rh$. [illegible] $2Rh$.

L'on voit [illegible]

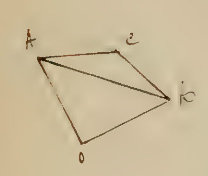
grand. Il diminue constamment à mesure [illegible]

[illegible]

[illegible] $x = 0$. La figure [illegible] ARBA [illegible]

Dans un cercle OA connaissant OB = OA = 10m ; arc AB = 83°20' calculer la surface du triangle ACB.

Solution.



Soit C le milieu de l'arc ACB on a AC = CB = 41°40'.

$A\hat{B}O = O\hat{A}B = \frac{180 - 83°20'}{2} = 90° - 41°40' = 48°20'.$

Nous avons $AB = \frac{\sin A\hat{O}B \times AO}{\sin A\hat{B}O} = \frac{\sin 83°20' \times 10}{\sin 48°20'}.$

$\log AB = \log \sin 83°20' + \log 10 - \log \sin 48°20'$

$= \bar{1},99705 + 1 + 0,12666 = 1,12371.$ D'où AB = [illegible]

On a ensuite $CB = \frac{AB \sin C\hat{A}B}{\sin A\hat{C}B}$. $A\hat{C}B = \frac{360 - 83°20'}{2} = 138°20'$

$C\hat{A}B = \frac{180 - 138°20'}{2} = 90 - 69°10' = 20°50'.$

$\log CB = \log AB + \log \sin C\hat{A}B - \log \sin A\hat{C}B =$

$1,12371 + \bar{1},55102 + 0,17731 = 0,85204$

Nous avons maintenant la surface $ACB = \frac{AB \times CB \times \sin C\hat{B}A}{2}$

$\log S = \log AB + \log CB + \log \sin C\hat{B}A - \log 2$

$\log AB = 1,12371$

$\log CB = 0,85204$

$\log \sin C\hat{B}A = \bar{1},55102$

$- \log 2 = \bar{1},69897$

D'où $\log S = 1,22570$

$S = 16^{m^2},815$

Dans un triangle rectangle [illegible] les deux côtés de l'angle droit [illegible] construire [illegible] calculer le maximum [illegible]

Solution

Soit $CB = a$; $AC = b$; $AB = c$; $AH = h$.

On a $b = a \sin B$; $c = a \cos B$.

D'où $b + c = a(\sin B + \cos B) = a\sqrt{2}\sin(45 - B)$. (1)

On a aussi $h = \frac{a \sin 2B}{2}$.

D'où $a = \frac{2h}{\sin 2B}$.

Portant dans (1) cette valeur de a il vient:

$$b + c = \frac{2h\sqrt{2}\sin(45 - B)}{\sin 2B} \quad \text{d'où} \quad h = \frac{(b+c)\sin 2B}{2\sqrt{2}\sin(45 - B)}.$$

Il nous faut donc chercher le maximum de $\frac{(b+c)\sin 2B}{2\sqrt{2}\sin(45 - B)}$

Comme $\frac{(b+c)}{2\sqrt{2}}$ est constant nous prenons le maximum de

$$\frac{\sin 2B}{\sin(45 - B)}.$$

Le maximum de cette fraction correspond au minimum [illegible]

soit pour

$$\sin(45 - B) = 0.$$

Quand [illegible] maximum donc

$$\sin 45 - B = 0$$

et $B = C = 45$.

Un triangle équilatéral de côté a tourne autour d'une droite MN passant par son sommet C et formant avec CB ... MN un angle de 45°. Calculer le volume engendré par le triangle ... [illegible]

Solution.

Soit $B\hat{C}N = 45°$; $A\hat{C}M = 75°$; $AB = AC = CB = a$; $BN = m$; $AM = n$.

On a

$$\text{Volume } ACB = S.AB \times \frac{h}{3}$$

$$= \frac{S.AB \times a\sqrt{3}}{6}.$$

$S.AB = \pi AB(BN + AM) = \pi a(m+n)$.

D'où Volume $ACB = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}(m+n)}{6}$.

$m = a \sin 45° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $n = a \sin 75°$.

D'où volume $ACB = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}(a \sin 45° + a \sin 75°)$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}(\sin 75° + \sin 45°).$$

$\sin 45° + \sin 75° = 2 \sin \dfrac{75+45}{2} \cos \dfrac{75-45}{2} = 2 \sin 60 \cos 15$.

D'où

$$\text{Volume } ACB = \frac{\pi a^3\sqrt{3} \times 2 \sin 60 \cos 15}{6}$$

$$= \frac{\pi a^3\sqrt{3} \sin 60 \cos 15}{3}.$$

Mais $\sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où Volume $ACB = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3} \times \sqrt{3} \cos 15}{3 \times 2}$

$$= \frac{\pi a^3 \times 3 \times \cos 15}{3 \times 2} = \frac{\pi a^3 \cos 15}{2}.$$

1° On donne une sphère de rayon R; coupée par un plan AB [illegible] rayon x calculer le maximum de la surface de la zone AN [illegible] augmentée de la surface [illegible] ou de la demi-sphère AMB

Solution.

Soit $ON = R$; $AS = SB = SM = x$; $SN = y$.

On a Surface zône $ANB = 2\pi Ry$.

Surface demi-sphère $AMB = 2\pi x^2$.

Nous avons donc, en faisant abstraction du facteur constant 2π à chercher le maximum de la somme

$$x^2 + Ry.$$

L'égalant à m on a

$$x^2 + Ry = m. \quad (1)$$

Mais nous avons

$$\overline{AS}^2 = NS \times SC$$

ou $$x^2 = y(2R - y)$$

Portant dans (1) cette valeur de x^2 il vient

$$y(2R - y) + Ry = m \text{ : ou } y^2 - 3Ry + m = 0$$

$$y = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 4m^2}}{2}. \quad \text{Condition de possibilité } m^2 \leq \frac{9}{4}R^2.$$

Maximum de $m^2 = \frac{9R^2}{4}$. Alors:

$$y = \frac{3R}{2}$$

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Démontrer quand $a+b+c=\pi$ les formules:

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c = 1-2\cos a\cos b\cos c.$$

$$\sin a+\sin b+\sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Solution.

Les angles supplémentaires ont des cosinus égaux et de signe contraire, donc

$$\cos c = -\cos(a+b) = \sin a\sin b - \cos a\cos b$$

d'où $\cos c+\cos a\cos b = \sin a\sin b.$

d'où $(\cos c+\cos a\cos b)^2 = \sin^2 a\sin^2 b.$

$\cos^2 c+\cos^2 a\cos^2 b+2\cos c\cos a\cos b = \sin^2 a\sin^2 b.$

Mais $\sin^2 a\sin^2 b = (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) = 1-\cos^2 a-\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 b$

Donc $\cos^2 c+\cos^2 a\cos^2 b+2\cos c\cos a\cos b = 1-\cos^2 a-\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 b$

Supprimant $\cos^2 a\cos^2 b$ il vient $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c = 1-2\cos a\cos b\cos c$

II Soit $\sin a+\sin b+\sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$

Nous avons $\sin c=\sin(a+b)$ donc

$\sin a+\sin b+\sin c = \sin a+\sin b+\sin(a+b) =$

$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{a+b}{2}\times 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$

Mais $\frac{a+b}{2} = \frac{180-c}{2} = 90-\frac{c}{2}.$

Donc $\sin\frac{a+b}{2} = \sin\left(90-\frac{c}{2}\right) = \cos\frac{c}{2}$

D'où $\sin a+\sin b+\sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$

Calculer tous les arcs satisfaisant à l'équation

$$\cos x + \cos(x+30) = \frac{3}{2}.$$

Solution.

Nous avons

$$\cos x + \cos(x+30) = 2\cos\frac{x+x+30}{2}\cos\frac{x-x-30}{2}$$

$$= 2\cos\frac{2x+30}{2}\cos\frac{-30}{2}$$

$$= 2\cos(15+x)\cos(-15):$$

Mais les arcs égaux et de signes contraires ont les cosinus égaux et de même signe donc

$$\cos(-15) = \cos(15).$$

D'où $\cos x + \cos(x+30) = 2\cos(15+x)\cos 15$.

D'où $2\cos(15+x)\cos 15 = \frac{3}{2}$.

D'où $\cos(15+x) = \frac{3}{4\cos 15}$.

$\log\cos(15+x) = \log 3 - \log 4 - \log\cos 15$.

$\log 3$	=	$0,47712$
$-\log 4$	=	$\bar{1},39794$
$-\log\cos 15$	=	$0,01506$
$\log\cos(15+x)$	=	$\bar{1},89012$.

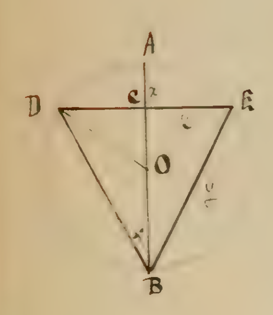
D'où $15+x =$ [illegible]° [illegible]' [illegible]8"

$x = \pm 24°\,3'\,48''$ puisqu'on détermine l'arc par [illegible]

[illegible] un [illegible] de rayon R, [illegible] plan DE tel que la surface de la calotte DAE soit égale à la surface latérale du cône DBCE.

Solution

Soit $OD = R$; $AC = x$; $EB = BD = y$; $EC = z$.



[illegible] calotte $DAE = 2\pi Rx$.

Surface lat. cône $DBE = \pi z y$. D'après l'énoncé on a

$2Rx = zy$; $z = \sqrt{x(2R-x)}$; $y = \sqrt{2R(2R-x)}$. D'où

$$2Rx = (2R-x)\sqrt{2Rx}.$$ Elevant au carré il vient:

$$x^2 - 6Rx + 4R^2 = 0; \quad x = R(3 \pm \sqrt{5}).$$

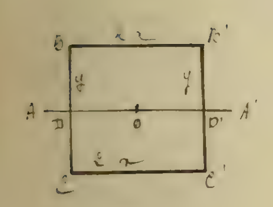
x' ne convient pas puisqu'il est plus grand que R. Nous prendrons donc x'' qui égale $R(3-\sqrt{5})$, valeur qui est facile à construire.

Construction. On mène AM perpendiculaire au diamètre AB et égale à 3R; puis CC' parallèle à AB et perpendiculaire sur AM [illegible] R. On a ainsi $CA = R$; $CM = 2R$. [illegible] $C'M = \sqrt{\overline{CM}^2 + \overline{CC'}^2} = \sqrt{5R^2} = R\sqrt{5}$.

Du point M comme centre avec un rayon égal à C'M, on décrit un arc de cercle qui coupe AM au [illegible] que $AD = AM - CM = AM - C'M = 3R - R\sqrt{5}$. Reportant AD sur AB en D' on a $AD' = AD = 3R - R\sqrt{5} = R(3 - \sqrt{5})$

Étant donné une sphère O de rayon R, on la coupe par deux plans BC, B'C' menés à égale distance du centre. Déterminer OD = OD' = x de telle sorte que la surface de la zone BB'CC' soit égale à la somme des surfaces des cercles BC, B'C'

Solution.



Soit $DD' = BB' = CC' = 2x$; $OD = OD' = x$; $BD = DC = C'D' = D'B' = y$.

On a surface zone $BB'CC' = 2\pi R \times 2x = 4\pi R x$.

Surface cercle BC + S. cercle B'C' = 2 cercles BC = $2\pi y^2$.

Puisque d'après l'énoncé

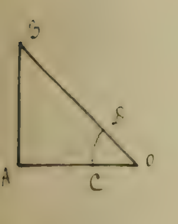
$$4\pi R x = 2\pi y^2 ; \text{ou}$$

$$2Rx = y^2. \quad \text{Mais } y^2 = R^2 - x^2.$$

D'où $x^2 + 2Rx - R^2 = 0$. $x = -R \pm \sqrt{2R^2} = R(-1 \pm \sqrt{2})$.

Nous prendrons $x = R(\sqrt{2} - 1)$ car l'autre valeur est négative ; sa

construction. Du point A on élève BA perpendiculaire à AO et égale à R. On joint BO. Le triangle rectangle



BOA donne $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

$BO = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$.

Du point B avec R pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe BO en un point D et qu'on a $OD = BO - BD = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$. On décrit ensuite du point O [illegible] ce cercle coupant AO en un point C qui est le point demandé.

Étant donné un cône ABC inscrit dans une sphère de rayon R, couper le cône et la sphère par un plan tel que la surface de la section du cône soit égale le $\frac{1}{3}$ de la section de la sphère.

Solution.

Soit ABC le cône donné ; $AD = h$; $OC = R$; $ER = y$; $AE = x$; $EM = z$.

On doit avoir, d'après l'énoncé

$$\pi \overline{ER}^2 = \frac{\pi \overline{EM}^2}{3} \text{ ou } \pi y^2 = \frac{\pi z^2}{3} \text{ ou } 3y^2 = z^2 \quad (1).$$

Menons OM. On a dans le triangle rectangle OEM.

$$\overline{EM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{EO}^2 \text{ ou } z^2 = R^2 - (R-x)^2 = x(2R-x).$$

D'où $$3y^2 = x(2R-x) \quad (2)$$

Les triangles semblables AER et ADC nous donnent.

$$\frac{\overline{DC}^2}{\overline{ER}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2} \text{ ; ou } \frac{\overline{DC}^2}{y^2} = \frac{h^2}{x^2}.$$

Or $\overline{DC}^2 = R^2 - (h-R)^2 = h(2R-h)$.

D'où $$\frac{h(2R-h)}{y^2} = \frac{h^2}{x^2}.$$

D'où $$\frac{2R-h}{y^2} = \frac{h}{x^2} \text{ ou } y^2 = \frac{x^2(2R-h)}{h}$$

Portant dans (2) cette valeur de y^2 il vient.

$$\frac{3x^2(2R-h)}{h} = x(2R-x) \text{ ou } 3x^2(2R-h) = hx(2R-x)$$

D'où

$$3x(2R-h) = (2R-x)h$$

D'où $6Rx - 3xh = 2Rh - xh$.

D'où $6Rx - 2xh = 2Rh$; d'où $x = \frac{Rh}{3R-h}$

Valeur entière de

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x.$$

Solution.

En réduisant au même dénominateur l'on a :

$$\frac{\sin 7x - 2\cos 2x \sin x - 2\cos 4x \sin x - 2\cos 6x \sin x}{\sin x}.$$

Mais on a

$\sin 7x - \sin 5x = 2\cos\frac{1}{2}(7x + 5x) \sin\frac{1}{2}(7x - 5x)$.

ou $\sin 7x - \sin 5x = 2\cos 6x \sin x$.

$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\frac{1}{2}(3x + 5x) \sin\frac{1}{2}(5x - 3x)$

ou $\sin 5x - \sin 3x = 2\cos 4x \sin x$.

$\sin 3x - \sin x = 2\cos\frac{1}{2}(3x + x) \sin\frac{1}{2}(3x - x)$

$\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$.

Substituant ces diverses valeurs dans la première expression on obtient :

$$\frac{\sin 7x - \sin 3x + \sin x - \sin 5x + \sin 3x - \sin 7x + \sin 5x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\sin x} = 1.$$

D'où

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x = 1.$$

On sait que les caractères de divisibilité par 9 et par 11 sont établis par des considérations d'analyse algébrique.

Solution.

On sait que le caractère de divisibilité d'un nombre par 9 est fondé sur ce que toute puissance de 10 diminuée de l'unité est multiple de 9, $\frac{10^m-1}{9}$ = nombre entier. D'autre part on établit en algèbre que $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x-a$, quel que soit m. Donc, si on suppose $x=10$, $a=1$, l'algèbre établit que 10^m-1^m, ou 10^m-1 est toujours divisible par $10-1$ ou par 9.

Le même caractère de divisibilité d'un nombre par 11 est fondé sur ces deux lemmes:

1° toute puissance paire de 10 diminuée de l'unité est multiple de 11

2° toute puissance impaire de 10 augmentée de l'unité est multiple de 11.

Or, on établit en algèbre que $x^m - a^m$ est divisible par $x+a$ dans le cas où m est pair. Donc, en supposant $x=10$, $a=1$, $10^{2n}-1$ est divisible par $10+1$ ou 11. De même x^m+a^m est divisible par $x+a$ dans le cas de m impair. Donc en supposant $x=10$; $a=1$ on a

$10^{2n+1}+1$ est divisible par 11.

La somme de deux nombres est 240. Leur plus petit multiple est 1768. Quels sont ces deux nombres.

Solution.

Soit x et y les deux nombres demandés, q et q' les quotients respectifs de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur que nous désignerons par D.

Nous aurons successivement:

$$1768 = D \times q \times q'$$

$$240 = x + y$$

puis $x = D \times q$; $y = D \times q'$

Donc $\frac{1768}{x} = q'$

$\frac{240}{y} = q$

or $\frac{x}{1768} = \frac{1}{q'}$; $\frac{y}{240} = \frac{1}{q}$

D'où $\frac{240}{1768} = \frac{q+q'}{q \times q'}$; ou $\frac{30}{221} = \frac{q+q'}{qq'}$

Or quand deux fractions irréductibles sont équivalentes leurs termes sont respectivement égaux.

Donc $30 = q+q'$; $221 = qq'$.

Donc $z^2 - 30z + 221 = 0$. D'où $q = 13$, $q' = 17$.

Donc $D = \frac{1768}{qq'} = 8$

Ainsi $x = Dq = 104$; $y = Dq' = 136$.

trouver deux nombres x et y qui respectivement ajoutés aux deux termes d'une fraction ne modifient pas la valeur.

Solution.

Soit $\frac{a}{b}$ la fraction. On doit avoir $\frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b}$.

Réduisant au même dénominateur on a

$$\frac{ab+xb}{b(b+y)} = \frac{ab+ay}{b(b+y)}$$

d'où $ab + xb = ab + ay$.

D'où $xb = ay$. D'où $\frac{x}{b} = \frac{a}{y}$.

Donc les deux nombres x, y doivent former une fraction équivalente à la fraction proposée. Il résulte de là que

Si on ajoute terme à terme des fractions équivalentes, le résultat est encore une fraction équivalente à chacune des proposées.

C'est la même proposition qui, appliquée à une série de rapports égaux, est conçue en ces termes.

Dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents et celle des conséquents forment un rapport égal aux premiers.

Vérifier si un nombre donné est premier.

Solution

Pour vérifier si un nombre donné est premier, il suffit de le diviser par tous les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée. Si aucune division ne réussit le nombre est premier.

Cette règle est fondée sur le théorème suivant :

Si un nombre n'admet aucun diviseur au-dessous de sa racine carrée, il n'en admet point au-dessus.

Soit N un nombre $= \sqrt{N} \times \sqrt{N}$ et supposons que dans l'hypothèse que N n'admet point de diviseurs $< \sqrt{N}$, il puisse admettre un $\alpha > \sqrt{N}$. Soit q le quotient de N par α, on aurait $N = \alpha \times q$, ou $\sqrt{N} \times \sqrt{N} = \alpha \times q$. Mais comme $\sqrt{N} < \alpha$ il faut, par compensation, que l'on ait $\sqrt{N} > q$ ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque q est aussi diviseur de N.

Pour suivre la règle il faut avoir une table de nombres premiers qu'il est toujours facile de former jusqu'à la limite voulue. On peut même se dispenser de connaître la racine carrée cherchée. En effet [illegible] tant que le diviseur premier essayé sera au-dessous de la racine, le quotient surpassera le diviseur. On s'arrêtera donc dans ses essais lorsque le quotient deviendra plus petit que le diviseur. Celui-ci excède en effet alors la racine [illegible]

La somme des numérateurs de plusieurs fractions divisée par celle de leurs dénominateurs est comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions.

Solution.

Soient $\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$.

les fractions supposées rangées par ordre croissantes

Il faut faire voir que

$$\frac{a+a_1+a_2 \ldots + a_n}{b+b_1+b_2 \ldots + b_n}$$

est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_n}{b_n}$.

En effet

$$(1)\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ donne} \\ \frac{a_1}{b_1} > \frac{a}{b} \text{ donne} \\ \frac{a_2}{b_2} > \frac{a}{b} \text{ donne} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \frac{a_n}{b_n} > \frac{a}{b} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} a = b \times \frac{a}{b} \\ a_1 > b_1 \times \frac{a}{b} \\ a_2 > b_2 \times \frac{a}{b} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_n > b_n \times \frac{a}{b} \end{cases}$$

Ajoutant membre à membre les relations (2)

$$a + a_1 + a_2 \ldots + a_n > \frac{a}{b}(b + b_1 + b_2 \ldots + b_n)$$

D'où

$$\frac{a+a_1+a_2 \ldots + a_n}{b+b_1+b_2 \ldots + b_n} > \frac{a}{b}.$$

On prouverait de même que cette fraction est $< \frac{a_n}{b_n}$

La racine carrée de la somme des carrés des numérateurs de plusieurs fractions équivalentes, divisée par la somme des carrés des dénominateurs est une fraction équivalente à chacune des fractions.

Solution.

Soient $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = \frac{a^n}{b^n}$ prouvons

$$\sqrt{\frac{a^2+a'^2+a''^2 \dots + a^2n}{b^2+b'^2+b''^2 \dots + b^2n}} = \frac{a}{b}.$$

En effet,

1°
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = \frac{a^n}{b^n}$$

enhaîne

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \dots = \frac{a^2n}{b^2n}.$$

d'où

$$\frac{a^2+a'^2+a''^2+\dots+a^2n}{b^2+b'^2+b''^2+\dots+b^2n} = \frac{a^2}{b^2}$$

et comme nous savons que dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents est à celle des conséquents comme [illegible] d'une fraction est à son terme dénominateur

on a,

$$\sqrt{\frac{a^2+a'^2+a''^2+\dots+a^2n}{b^2+b'^2+b''^2+\dots+b^2n}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Mettre sous forme de polynôme algébrique le nombre 45932,4795.

Solution

Soit $x = 10$. On voit immédiatement que la partie entière du nombre donné peut se mettre sous la forme :

$$4x^4+5x^3+9x^2+3x+2x^0.$$

Quant à la partie décimale, elle répond à l'expression fractionnaire

$$\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{5}{x^4},$$

ou bien

$$4\times\frac{1}{x}+7\times\frac{1}{x^2}+9\times\frac{1}{x^3}+5\times\frac{1}{x^4}.$$

Il a été démontré en algèbre la légitimité des conventions symboliques

$$x^0=1 \text{ et } \frac{1}{x}=x^{-1},\ \frac{1}{x^2}=x^{-2} \text{ et}$$

ainsi de suite.

Donc, on a identiquement

$$45932,4795=4x^4+5x^3+3x^2+9x+2x^0+4x^{-1}+7x^{-2}+9x^{-3}+5x^{-4}$$

Si on divise un nombre par le produit de plusieurs facteurs, le quotient obtenu est le même que en le divisant successivement par chacun de ces facteurs, si les divisions réussissent. Si elles ne réussissent pas le théorème est vrai encore seulement pour les parties entières de ces quotients.

Solution.

Soient N, abc le nombre et le produit; q, q', q'' les quotients; r, r', r'' les restes on a

$$N = aq + r \quad (1)$$

$$q = bq' + r' \quad (2)$$

$$q' = cq'' + r'' \quad (3)$$

En substituant dans (1) la valeur de q déduite de (2), et dans le résultat celle de q' déduite de (3) on a

$$N = abc\,q'' + ab\,r'' + a\,r' + r.$$

D'où $\frac{N}{abc} = q'' + \frac{ab\,r'' + a\,r' + r}{abc}$;

et si l'on peut trouver que $\frac{ab\,r'' + a\,r' + r}{abc} < 1$, même dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire quand $r'' = c-1$, $r' = b-1$, $r = a-1$, q'' sera bien la partie entière du quotient

$$\frac{N}{abc}.$$

En faisant ces substitutions on trouve en effet

$\frac{abc-1}{abc}$ quantité plus petite que 1.

Prouver par le calcul que la connaissance des trois angles d'un triangle ne suffit pas pour trouver les côtés, mais que les rapports seuls de ces côtés sont déterminés.

Solution

Il s'agit de faire voir que si on donne dans un triangle les angles A, B, C les côtés a, b, c ne sont pas déterminés.

On sait que dans un triangle, un côté quelconque est égal à la somme des projections des deux autres, donc les six quantités A, B, C, a, b, c sont unies entre elles par les trois équations

$$a = c \cos B + b \cos C$$

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$(-1)a + b \cos C + c \cos B = 0 \quad (1)$$

$$a \cos C + (-1)b + c \cos A = 0 \quad (2)$$

$$a \cos B + b \cos A + (-1)c = 0 \quad (3)$$

Or, on démontre en algèbre que lorsque les termes tout connus ... à trois inconnues sont nuls, les numérateurs des valeurs des inconnues sont nuls, ainsi que le dénominateur ou dénominateurs. Le déterminant est

$$D = ab'c'' - ac'b'' - ba'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a''$$

Les équations étant

$$ax + by + cz = d$$

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

$$a''x + b''y + c''z = d''$$

Et en posant $a = -1$, $b = \cos C$, $c = \cos B$

$$a' = \cos C, \; b' = -1, \; c' = \cos A$$

$$a'' = \cos B, \; b'' = \cos A, \; c'' = -1 \quad \text{Suivi}$$

$$D = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C$$

Mais $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C = 0$. Donc $D = 0$.

Donc $a = \frac{0}{0}$; $b = \frac{0}{0}$; $c = \frac{0}{0}$.

Si on résout les équations (1) (2) et (3) on trouve

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Donc les rapports seuls des côtés sont déterminés.

Exposer la méthode de la mesure des aires par la décomposition en trapèzes.

Solutions.

Méthode ordinaire

Soit ABCDE un polygone dont nous supposerons d'abord le périmètre accessible.

Menons une diagonale AD dans le sens de la plus grande longueur et des divers sommets B, C, E, abaissons les perpendiculaires Bm, Cn, Ep sur AD.

Le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles rectangles et en trapèzes dans lesquels les bases ne sont autres que les hauteurs des triangles.

Il suffira donc de mesurer à la chaîne les hauteurs Bm, Cn, Ep.

les distances Am, mn, nD, pD.

On aura ainsi les éléments nécessaires pour calculer la surface des triangles et des trapèzes

dont la somme donnera l'aire cherchée.

MÉTHODE STAINVILLE

Menons dans le plan du polygone P.A.P. une droite indéfinie xy sur laquelle nous prenons un point origine O.

Abaissons des différents sommets du polygone des perpendiculaires sur xy et mesurons chacune d'elles ainsi que sa distance au point O.

Désignons par b', b'', les distances OB', OB'' et par a, a' les perpendiculaires. Ainsi représentant par P l'aire du polygone nous avons :

$$2P = (a + a')(b' - b) + (a' + a'')(b'' - b') + (a'' + a''')(b''' - b'') - (a''' + a^{IV})(b''' - b^{IV})$$

$$- (a^{IV} + a^{V})(b^{IV} - b^{V}) - (a^{V} + a)(b^{V} - b)$$

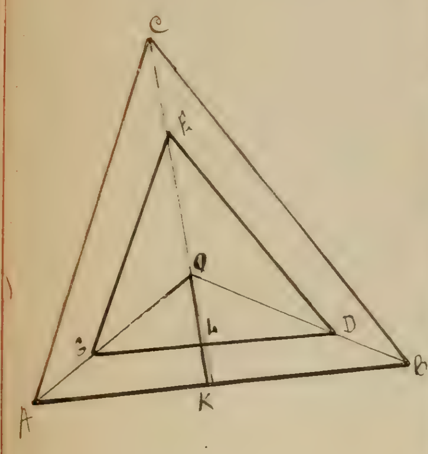
en effectuant et réduisant

$$2P = ab' - a'b + a'b'' - a''b' + a''b''' - a'''b'' + a'''b^{IV} - a^{IV}b'''$$

$$+ a^{IV}b - a^{V}b^{IV} + a^{V}b - ab^{V}.$$

Cette méthode est beaucoup plus expéditive que la ...

Étant donné le triangle ABC, dont les trois côtés AB, BC, AC sont respectivement égaux à 13, 15 et 14 mètres, et dont la surface est de 84 mètres carrés ; on demande de placer dans l'intérieur de ce triangle un autre triangle, dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux du premier, en soient également éloignés, et contiennent entre eux une aire égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire du triangle proposé. Donner à 0,001 près la distance qui sépare les parallèles.



Solution.

Supposons le problème résolu et soit DEG le triangle demandé. Puisque DG est à la même distance de AB que GE de AC, le sommet G, intersection de GD et de EG, est à égale distance de AB et de AC et se trouve donc sur la bissectrice de l'angle A. De même les sommets D et E seront respectivement sur les bissectrices des angles B et C. Ces trois bissectrices se coupent en un point O qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Il est en même temps le centre du cercle inscrit dans le triangle DEG, puisque les angles en E G sont aussi divisés en deux parties égales par les lignes AO, BO, CO ; car on a

$O\hat{G}D = O\hat{A}B = O\hat{A}C = O\hat{G}E$, de même ...

Du point O j'abaisse sur AB la perpendiculaire OK, qui coupe DG au point L. Il s'agit de mesurer la distance KL. Or cette distance KL est évidemment égale à la différence des rayons OK, OL des cercles inscrits dans les deux triangles. Pour trouver OK on le calculera par l'aire d'un triangle peut s'obtenir en multipliant le demi périmètre par le rayon du cercle inscrit trouvé.

$$OK = \frac{84 \times 2}{13+15+14} = 4.$$

Pour trouver OL on pourrait aussi calculer l'aire et le demi périmètre du triangle DEG et ensuite les diviser, mais il est plus simple de se servir des relations qui nous sont fournies par la similitude des triangles ABC, DEG. On sait que dans deux triangles semblables les carrés des rayons des cercles inscrits sont proportionnels aux surfaces des triangles. On a donc $\frac{OK^2}{OL^2} = \frac{ABC}{DEG} = \frac{4}{3}$.

Extrayant la racine carrée il vient

$$\frac{OK}{OL} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

D'où l'on tire $OL = \frac{OK \times \sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Nous aurons enfin pour la valeur de KL

$$KL = OK - OL = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Pour avoir cette valeur à moins de 0,001 près, il faudra prendre la racine de 3 à moins de $\frac{1}{2}$ millième seulement car étant ensuite multipliée par 2 l'erreur deviendrait plus grande que 0,00

La valeur de $\sqrt{3}$ à moins d'un demi-millième est 1,732. On aura donc $KL = OK - OL = 4 - (2 \times 1{,}732) = 0{,}536$, comme la valeur de $\sqrt{3}$ a été prise approchée par défaut, le résultat est approché par excès à cause de la soustraction.

[illegible] cette proportion $\frac{AB}{DG} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ on aurait pour DG la valeur $\frac{[illegible]}{2}\sqrt{3}$ = 11,[illegible] de même, on aurait :

$GE = \frac{14}{2}\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 12{,}124$ et $DE = \frac{15}{2}\sqrt{3} = 12{,}996$.

On peut vérifier [illegible] multipliant par la moitié du rayon du cercle circonscrit, c'est-à-dire par $\sqrt{3}$.

Par l'une et l'autre méthode, on trouve toujours, pour la surface DEG, 63 [illegible] $84 \times \frac{3}{4}$ =

Le triangle DEG est [illegible] solution [illegible] tant qu'on y met la condition que le second triangle soit dans l'intérieur du premier. Mais il y en aura une seconde, si on admet que [illegible] au premier.

Dans cette seconde solution les angles homologues, au lieu d'avoir leurs côtés dirigés dans le même sens, les dirigent en sens contraire. De cette, les ~~sommets~~ sommets du second triangle sont [illegible]

[illegible] x^2+x+1 [illegible] $2x+1$ [illegible]
[illegible] 4.

[illegible]

Soit $a = x^2+x+1$; $b = 2x+1$; $c = x^2-1$.

Nous avons

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad (1)$$

$$p = \frac{x^2+x+1+2x+1+x^2-1}{2}$$

$$p = \frac{2x^2+3x+1}{2} = \frac{(2x+1)(x+1)}{2}$$

$$p-a = \frac{2x^2+3x+1}{2} - (x^2+x+1)$$

$$= \frac{2x^2+3x+1-2x^2-2x-2}{2}$$

[illegible]

$$bc = (2x+1)(x^2-1) = (2x+1)(x+1)(x-1)$$

D'où portant dans (1) ces valeurs de $p-a$ et de bc

Il vient

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(2x+1)(x+1)(x-1)}{4(2x+1)(x+1)(x-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Mais [illegible] $\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{A}{2}$ [illegible]

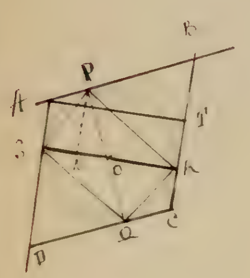
$A =$ [illegible]

$=$ [illegible]

Démontrer, 1° que tout parallélogramme circonscrit au cercle est un losange; 2° que parmi les losanges circonscrits au cercle, le carré est le plus petit; 3° que le produit de la surface du losange circonscrit par celle du rectangle inscrit obtenu en joignant les points de contact du losange est constant; 4° que parmi les rectangles inscrits dans le cercle, le carré est le plus grand.

Solution

I° Tout parallélogramme circonscrit au cercle est un losange.



Il faut démontrer par exemple que $AB = BC = \ldots$

En effet $PB = BR$ comme tangentes issues d'un même point et $AP = CR$ comme tangentes issues de points équidistants du centre; on sait en effet que les angles A et C étant égaux, ont leurs sommets sur une circonférence concentrique à la première ayant OC pour rayon. Ajoutant on a $PB + PA = BR + CR$ ou $AB = BC$.

On verrait de même que $AD = DC$, ce qu'on voit immédiatement du reste puisque $AD = BC$ et que $AB = CD$. On a donc $AB = BC = CD = DA$, et la figure est un losange.

II Parmi les losanges circonscrits au cercle le carré est le plus petit.

En effet la surface du carré est représentée par $4R^2$ tandis que la surface de ABCD est représentée par PQ ou 2R multiplié par AB; OP est le prolongement de OQ car des lignes parallèles ont leurs perpendiculaires en commun

Or, AB est plus grand que 2R comme oblique relativement à la perpendiculaire AI sur BC, AI étant égale à 2R. On a donc $AB^2 < 2R \times b$; b étant le côté du losange.

III Si on joint les points de contact des côtés du losange, il est aisé de voir que l'on a un rectangle ainsi qu'un parallélogramme dont les diagonales PQ et RS sont égales comme diamètres d'une même circonférence. Si on multiplie la surface du losange par la surface du rectangle on obtient un produit constant. La surface du losange est égale à $PQ \times AB$, et la surface du rectangle à $PS \times PR$; ou à $SR \times PM$. Il faut donc démontrer que le produit $PQ \times AB \times SR \times PM$ est constant.

Ce produit revient à $4R^2 \times AB \times PM$

et comme R ne change pas, il suffit de faire voir que

$AB \times PM$ est un produit constant.

Pour cela menons AT parallèle à SR, et par suite égal à 2R ; nous aurons deux triangles semblables ABT, MPO, qui ont un angle droit en M et en T, et un angle égal ATB comme ayant les côtés perpendiculaires ; on en déduit

$$\frac{AB}{2R} = \frac{R}{PM}$$

donc $AB \times PM = 2R^2$ qui est bien une quantité constante.

On voit alors que le produit indiqué est égal à $8R^4$ [illegible] se peut vérifier pour le cas le plus simple, celui où le losange et le rectangle deviennent les carrés circonscrit et inscrit au cercle. On a alors en effet pour surface du premier $4R^2$ et du second $(R\sqrt{2})^2 = 2R^2$ ce qui donne bien en les multipliant $8R^4$.

IV. On déduit du théorème et du précédent que le carré inscrit est le plus grand de tous les rectangles inscrits; en effet le losange circonscrit devient un carré, le rectangle inscrit devient aussi un carré (ses côtés devenant égaux comme cordes d'arcs égaux); or, le produit des deux surfaces est constant, et nous avons vu que la surface du carré circonscrit était minimum, donc la surface du carré inscrit est maximum. Cette dernière proposition peut d'ailleurs se vérifier directement [illegible] la surface du rectangle étant égale à $2R \times P\,[illegible]$ [illegible] $2R \times PM$; [illegible] [illegible] [illegible] valeur est maximum et devient égale au rayon et le rectangle devient un carré.

On peut établir la même proposition sur cette [illegible] de maximum $4R^2 = a^2 + b^2$. trouver le maximum [illegible] a.

On voit que c'est quand

$a = b$

On fond ensemble p kilogrammes d'un métal, dont la densité est d, avec p' kilogrammes d'un autre dont la densité est d'; la densité de l'alliage étant d'', on demande s'il y a eu contraction ou dilatation, et quel est le coefficient $\frac{1}{\delta}$.

Solution :

On a $\delta = \frac{(pd' + p'd)d''}{(pd' + p'd)d''\,(p+p')dd'}$

δ est ici une quantité essentiellement positive, donc il y aura contraction si on a

$$(pd' + p'd)d'' > (p+p')dd'$$

d'où $d'' > \frac{(p+p')dd'}{pd' + p'd}$

Pour interpréter ce résultat divisons haut et bas du second membre par dd' il vient

$$d'' > \frac{p + p'}{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}} = \omega$$

Or $p + p'$ est le poids de l'alliage ; $\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}$ le volume des métaux donc ω est la densité qu'aurait l'alliage s'il n'y avait ni contraction ni dilatation et comme quand il y a contraction, la densité augmente on doit bien avoir $d'' > \omega$.

Dans le cas de dilatation on aurait $d'' < \omega$.

Si $d'' = \frac{(p+p')dd'}{pd' + p'd}$

ou $d'' = \omega$. [illegible]

il n'y a ni contraction ni dilatation

Quelle est la condition algébrique qui doit être remplie pour qu'une bulle d'eau savonneuse puisse s'élever dans l'air atmosphérique ? On donne le rayon extérieur de l'enveloppe, l'épaisseur de son épaisseur [illegible] et les densités D, d, δ de l'eau savonneuse, de l'air et de l'hydrogène.

Solution.

Le volume de la bulle est $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Le volume intérieur $\frac{4}{3}\pi(r-e)^3$

Le volume de l'enveloppe qui est la différence est exprimé par

$$\frac{4}{3}\pi\left(r^3-(r-e)^3\right),$$

et le poids $\frac{4}{3}\pi\left(r^3-(r-e)^3\right)D$.

Le poids de l'hydrogène $= \frac{4}{3}\pi(r-e)^3\delta$;

Le poids de l'air déplacé $= \frac{4}{3}\pi r^3 d$.

Or pour que la bulle forme ballon il faut que son poids augmenté de celui de l'hydrogène soit moindre que le poids de l'air déplacé.

Nous pouvons donc poser

$$\frac{4}{3}\pi\left(r^3-(r-e)^3\right)D+\frac{4}{3}\pi(r-e)^3\delta < \frac{4}{3}\pi r^3 d.$$

ou $\left(r^3-(r-e)^3\right)D+(r-e)^3\delta < r^3 d$.

Si on résout cette inégalité par rapport à r on

$$\frac{r}{e} > \frac{\sqrt[3]{D-\delta}}{\sqrt[3]{D-\delta}-\sqrt[3]{D-d}}$$

On suppose que dans la machine d'Atwood les deux poids qui se font équilibre sont respectivement égaux à 4k.5. On demande d'apprécier comment la machine ralentit le mouvement lorsqu'on surcharge l'un des poids d'un gramme.

Solution

Représentons par M l'un des poids qui se font équilibre, par x la vitesse acquise au bout d'une seconde, et par m le poids additionnel.

Le poids M s'il tombait seul, aurait au bout d'une seconde une quantité de mouvement égale à $m \times g$. Lorsqu'on place m sur M le même poids reste moteur mais la masse sollicitée devient $2M+m$, et la quantité de mouvement doit être la même puisque la force est constante.

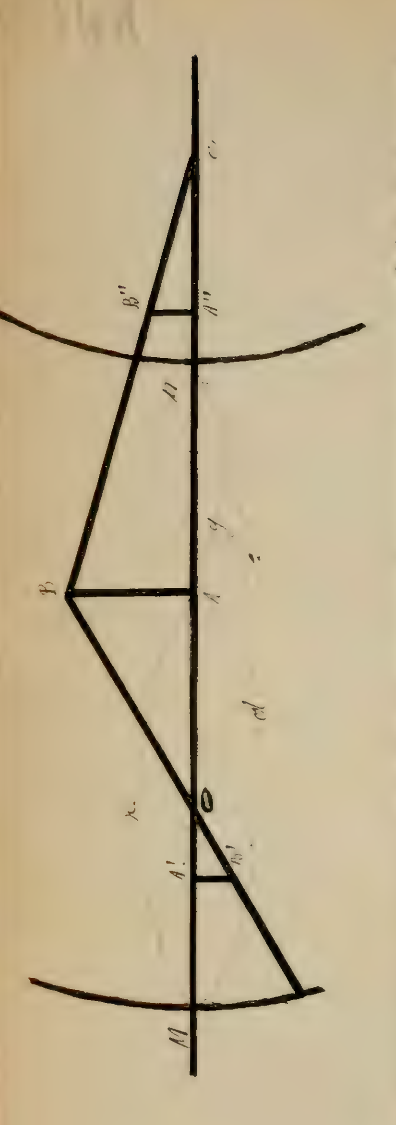
Or, si nous représentons par x la vitesse acquise au bout d'une seconde dans ce dernier cas, nous aurons $(2M+m)x$ pour deuxième quantité de mouvement.

Donc $(2M+m)x = mg$.

$$\text{D'où } x = \frac{mg}{2M+m}$$

Si maintenant nous remplaçons les lettres par les données de la question, on trouve

$$x = \frac{1}{10\cdot0} \times g.$$



Deux miroirs sphériques l'un concave, l'autre convexe dont les rayons de courbure sont $2f$ et $2f'$, sont disposés de manière que leurs axes coïncident, et que leurs surfaces réfléchissantes se regardent. Soit l la longueur de la ligne horizontale qui joint leurs centres de figure. En quel point de cette droite faut-il placer une ligne lumineuse verticale pour que les hauteurs des nouvelles images soient égales

Solution

Supposons le problème résolu et soit AB la position inconnue

Posons $AM = x$; $AM' = y$. On a

$$x + y = d.$$

La formule des miroirs concaves donnent pour les points A et A' la relation

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Ici $p = AM = x$

donc $\frac{1}{p'} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$

d'où $p' = \frac{xf}{x - f}$.

De même la formule des miroirs convexes donne pour les points A et A''

$$\frac{1}{p''} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Ici $p = AM' = y$.

D'où $\frac{1}{p''} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f'}$

d'où $p'' = \frac{y f'}{y + f'}$

En considérant les triangles ABC, $CA'B'$ on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{x-2f}{2f-f'} = \frac{x-2f}{2f-\frac{xf}{x-f}}$$

d'où $$A'B' = AB \times \frac{2f - \frac{xf}{x-f}}{x-2f}.$$

De même les triangles BAC, $B''A''C'$ donnent

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC'}{A''C'} = \frac{y+2f'}{2f'-f''} = \frac{y+2f'}{2f'-\frac{yf'}{y+f'}} \quad \text{d'où } A''B'' = AB \times \frac{2f' - \frac{yf'}{y+f'}}{y+2f'}$$

Comme d'après l'énoncé $A''B''$ doit égaler $A'B'$ on a

$$\frac{2f - \frac{xf}{x-f}}{x-2f} = \frac{2f' - \frac{yf'}{y+f'}}{y+2f'}$$

cette équation se réduit à

$$fy + ff' = f'x - ff'.$$

Comme $y = d - x$, il vient

$$x = \frac{2ff' + df}{f'+f}$$

$$y = \frac{df' - 2ff'}{f'+f}$$

Si la question avait exigé que les images fussent entre elles dans le rapport $\frac{m}{m'}$, on aurait eu

$$\frac{2f - \frac{xf}{x-f}}{x-2f} : \frac{2f' - \frac{yf'}{y+f'}}{y+2f'} = \frac{m}{m'}$$

On aurait donc

$$x = \frac{ff'(m+m') + dfm'}{f'm + fm'}$$

$$y = \frac{dmf' - ff'(m+m')}{f'm + fm'}.$$

Construire géométriquement la valeur de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ donnée par la formule $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$

Solution.

Cette valeur de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ peut s'écrire sous la forme

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}\left(-1 \pm \operatorname{séc} a\right).$$

Rétablissant l'homogénéité en multipliant par r les termes qui renferment des lignes trigonométriques on a

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{r(-r \pm r\operatorname{séc} a)}{\operatorname{tg} a}.$$

Soit décrit avec le rayon $CA = r$, menons en A la $\operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} a$. Joignons OB. Du point O comme centre et d'un rayon $= r$ décrivons une circonférence qui coupe OA aux points D, D'. Portons AB sur OA, joignons CF, et par les points D, D' menons des parallèles à CF. AT, AT' seront les deux lignes cherchées. En effet la similitude des triangles CAF, DAT donne

$$\frac{CA}{AD} = \frac{AF}{AT}$$

ou

$$\frac{r}{-r + r\operatorname{séc} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{AT}$$

$$\text{D'où } AT = \frac{r(-r + r\operatorname{séc} a)}{\operatorname{tg} a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

On trouverait de même pour l'autre...

Trouver les valeurs de x pour lesquelles l'expression $\frac{a^2x^2+b^2}{(a^2-b^2)x}$ devient maximum ou minimum.

Solution

Posons $\frac{a^2x^2+b^2}{(a^2-b^2)x} = y$; d'où

$$x = \frac{(a^2-b^2)y}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2}\sqrt{(a^2-b^2)^2y^2-4a^2b^2}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles il faut qu'on ait :

$(a^2-b^2)^2y^2 > 4a^2b^2$

la valeur minimum répondra à $(a^2-b^2)^2y^2 = 4a^2b^2$

D'où $y^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}$; d'où $y = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

Alors $x = \frac{b}{a}$.

Quant à la valeur maximum on voit facilement qu'elle est égale à l'infini, et qu'elle répond à $x = \infty$.

Ceci ce qui ressort immédiatement de l'inspection de la fonction, qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{a^2x + \frac{b^2}{x}}{a^2-b^2}$$

qu'on obtient en divisant tout par x.

Or à mesure que x augmente, a^2x augmente et $\frac{b^2}{x}$ diminue et $x = \infty$

donne $\infty + 0 = \infty$.

Décrire un cercle tangent à une droite donnée et à une circonférence donnée en un point connu.

Solution

Soit mn la droite, C la circonférence, A le point donné.

Il est évident que la ligne des centres devant passer par le point A, le centre inconnu O' doit se trouver quelque part sur le prolongement de OA.

Ce point O' doit être équidistant de la droite donnée mn et du point A, ou de la droite mn et de nK tangente à la circonférence au point A. Donc il appartient à la bissectrice de l'angle mnK de ces deux lignes. Il est donc déterminé par l'intersection de nK et du prolongement de OA.

Le problème est susceptible d'une autre solution qu'on obtient [illegible] bissectrice [illegible] nA prolongée jusqu'à sa rencontre avec AO. [illegible]

Si mn est parallèle à An, le centre O' est au milieu de la distance du point A à la droite.

[illegible]

Solution

Soit $AB = x$, $AC = b$; $CO = r$, $CB = a$.

Tirons $CC' = 2r$; AC, AC', CB, BC' on a

$$AB \times CC' = AC \times BC' + AC' \times CB$$

Mais $AC' = \sqrt{4r^2 - b^2}$, $BC' = \sqrt{4r^2 - a^2}$

d'où $x \times 2r = a\sqrt{4r^2-b^2} + b\sqrt{4r^2-a^2}$

Donc $x = \dfrac{a\sqrt{4r^2-b^2} + b\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$ (1)

Si on pose $a = b$, l'on [illegible]

$$x = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2-a^2}.$$

Si on résout cette équation par rapport à a on trouve

$$a = \sqrt{r(2r \pm \sqrt{4r^2-x^2})}$$

C'est on a ainsi la corde de la moitié d'un arc en fonction de la corde de cet arc.

Si l'on résout (1) en posant $x = c$; et $a + b + c = 2p$, on a

$$r = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

[illegible] $r = \dfrac{abc}{[illegible]}$

[illegible] $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Déterminer [illegible] plan dans [illegible] point éclairé dans l'eau. On [illegible] [illegible] point d'émergence.

Solution

Soient A le point éclairé, AC l'un des rayons qui partent de ce point, CO le rayon émergent qui aboutit à l'œil [illegible] sur la surface plane MM' qui [illegible] [illegible] réfraction est $\frac{4}{3}$.

On a la relation

$$\sin PCO = \frac{4}{3} \sin P'CA$$

or

$$PCO = A'DC$$

et

$$ACP' = DAC$$

Donc $\sin A'DC = \frac{4}{3} \sin DAC$.

Le rayon CO étant peu incliné vers [illegible] on peut remplacer les sinus par les tangentes

donc

$$\frac{DC}{DA'} = \frac{3}{4} \frac{DC}{DA} \text{ d'où } DA' = \frac{3}{4} DA.$$

[illegible]

[illegible]

On voit alors le point A élevé du $\frac{1}{4}$ de sa distance [illegible]

Théorème.

Le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est égal à un rapport donné est une circonférence.

Soient les points fixes A et B [illegible] un point D tel que l'on ait $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$ (1) [illegible] Aux points [illegible] donnés [illegible] A et B il existe [illegible] point D qui réponde à la question. Et ce point est le seul [illegible] de AB et [illegible] de A si $m > n$ un point F tel que l'on ait $\frac{FA}{FB} = \frac{m}{n}$ (2) on voit qu'un point F remplira cette condition et qu'il sera le seul et les deux points F et D seront [illegible] [illegible] [illegible] $= \frac{m}{n}$ (3)

et si l'on joint MD [illegible]

de (1) et de (3) on a $\frac{AD}{DB} = \frac{MA}{MB}$ la ligne

MD est bissectrice de l'angle AMB

de même à cause de (2) et de (3) on a

$\frac{MA}{MB} = \frac{FA}{FB}$ la ligne MF est bissectrice

de l'angle AMK et comme les an-

-gles KMA et AMB sont supplémentaires

leurs bissectrices sont perpendiculaires

et par suite M se trouve sur une

circonférence décrite sur FD comme

diamètre. Il reste à faire voir que tout

point M de la circonférence [illegible]

[illegible]

on a $\frac{AD}{DB} = \frac{FA}{FB} = \frac{m}{n}$ (1)

cela étant si par A je mène une parallèle

AK à la bissectrice MD et si par le même

point A je mène une parallèle à la

bissectrice MF à cause des parallèles

des lignes AC et FM j'aurai $\frac{FA}{FM} = \frac{MC}{MB}$

et à cause des parallèles [illegible] des lignes MB

F et I ; ainsi $\frac{AD}{OB} = \frac{MI}{MB}$ et comme à

cause de (1) et de (2) les premiers rapports

des deux proportions sont égaux, il en

est de même des seconds et on aura

$\frac{MO}{MB} = \frac{MI}{MB}$ ou $MO = MI$

Ainsi les deux droites FO et FI étant

respectivement parallèles à deux droites

perpendiculaires sont perpendiculaires

et par suite le triangle MO est rectangle

et comme il est [illegible] et l'hypoténuse

[illegible] les [illegible] MA MB [illegible]

$\frac{FA}{FB} = \frac{MC}{MB}$ ou $\frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MB}$ et ainsi à

cause de (2) on a :

$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ c'est à dire que le

point [illegible] est tel

que ses distances [illegible] B et A [illegible]

dans le rapport $\frac{m}{n}$. Nous [illegible]

[illegible]

[illegible] décrite sur FD comme diamètre.

relations métriques entre les éléments linéaires et proportions d'un triangle.

27. Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, 1° cette perpendiculaire divise le triangle en 2 triangles semblables entre eux et semblables au triangle total. 2° chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent à ce côté. 3° la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les 2 segments de l'hypoténuse.

Soit le triangle ABC rect. en A. Menons AD perpendiculaire à BC. Je dis que le triangle ABC est semblable au triangle ADC. Ces 2 triangles sont rectangles et ils ont B commun. De même ADC et ABC ont C commun. Les triangles ABD et ADC étant

[illegible] semblables [illegible]

Je dis (2°) que AB est moyenne proportionnelle entre BC et BD. En effet de la similitude des triangles ABD et ABC on déduit : $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$. D'où

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC \quad (1)$$

De même on a $\overline{AC}^2 = BC \times DC$ (2).

Je dis (3°) que AD est moyenne proportionnelle entre BD et DC. En effet de la similitude des triangles ADB et ADC on tire $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$. D'où $\overline{AD}^2 = BD \times DC$ (3)

Rem. Si sur BC comme diamètre on décrit [illegible] circonférence [illegible] les relations (1) et (2) montrent que :

Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre [illegible]

d'un point quelconque d'une circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre.

Cor. II. Les carrés des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse. En effet si on divise une à une les égalités (1) et (2) on a $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \times BD}{BC \times DC} = \frac{BD}{DC}$.

III. Dans tout triangle rectangle le carré d'un côté de l'angle droit et le carré de l'hypoténuse sont dans le rapport de la projection de ce côté sur l'hypoténuse et l'hypoténuse. En effet comme il a été prouvé $AB^2 = BC \times BD$ d'autre part on a évidemment $BC^2 = BC \times BC$ en divisant ces quantités une à une

A

B

on a $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$.

[illegible] la somme des carrés des côtés de l'angle droit [illegible] rectangle [illegible] [illegible] on [illegible] [illegible]

$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC =$
$BC(BD + DC) = BC \times BC = \overline{BC}^2$.

Si l'on désigne par a, b, c les trois côtés d'un triangle rectangle, par h la perpendiculaire abaissée du sommet [illegible] [illegible] [illegible] les [illegible] des deux côtés [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible]

$b^2 = a\,p$

$c^2 = a\,q$

$h^2 = p\,q$. On peut y joindre la relation donnée par la figure

$p + q = a$.

[illegible] aura toujours deux des quantités [illegible] données [illegible] [illegible]

a pour donné lieu à un certain [illegible]
de questions.

Supposons par exemple qu'on demande [illegible]
[illegible] de l'angle droit b et c et [illegible]
[illegible] les autres quantités [illegible]
a sera donné par la relation
$a^2 = b^2 + c^2$. d'où l'on déduit $a =$ [illegible]
les quantités b et y seront données par
$b =$ [illegible]
donné par $h^2 = bu = \frac{b^2c^2}{a^2}$
[illegible]
[illegible]
quantités indiquées précédemment quand
on donne deux de ces quantités.

Théorème

Le carré du côté opposé à l'angle aigu [illegible]
[illegible]
somme des carrés des deux autres [illegible]
moins deux fois le produit de [illegible]

[illegible] côtés par la projection de l'autre sur lui.

Soit ABC. [illegible] B [illegible] ABC [illegible]

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 \quad (1)$$

[illegible] $\overline{AB}^2$ [illegible] $\overline{AD}^2$ [illegible]

[illegible] donc $\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 \quad (2)$

D'autre part comme $DC = AC - AD$ on a

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \times AD \quad (3)$$

Remplaçant (2) et (3) dans (1) il vient

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \times AD.$$

En simplifiant il reste

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC \times AD$$

[illegible]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AD.$$

[illegible]

[illegible] opposé à l'angle
obtus dans un triangle obtusangle [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] -ci.

D [illegible] A
le triangle rectangle BDC donne
$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ [illegible]

B A C

Remplaçons $\overline{BD}^2$ et $\overline{DC}^2$ par leurs
valeurs équivalentes. Comme on a
$DC = DA + AC$ on a $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DA}^2 + 2AC \times AD$
[illegible] BDA donne $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2$ [illegible]
[illegible] de (1) et de (3) (4) devient.
$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD + \overline{AD}^2$
[illegible] $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AC \times AD$.

On en déduit $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AD$.

Réciproque des théorèmes précédents [illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible] carré du plus grand côté est [illegible] que la somme des carrés des deux [illegible]

[illegible]

[illegible] est rectangle parce que $\overline{13}^2 = \overline{12}^2 + 5^2$.

[illegible] dont les côtés sont 13. 14. 15 [illegible]

[illegible] triangle dont les côtés sont 13. 12. 4.

[illegible] angle obtus car

$13^2 > \overline{12}^2 + (4)^2$.

[illegible]

[illegible] traité des théorèmes que [illegible]

[illegible]

[illegible] ou [illegible] la question suivante: Étant donnés les 3 côtés a, b, c d'un triangle [illegible]

Soit AD cette hauteur h.

[illegible] donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2$$

ou $h^2 = b^2 - \overline{DC}^2$ (1) Or DC [illegible] BC est donnée par la relation [illegible]

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times DC$ c. à. d.

$c^2 = b^2 + a^2 - 2a \times DC$ d'où l'on déduit

$DC = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Portant cette valeur dans (1)

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

[illegible] la différence [illegible] des numérateurs [illegible]

$$h^2 = \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

la quantité renfermée dans la première parenthèse est égale à : $(a+b)^2 - c^2$.
la quantité renfermée dans la seconde est égale à $c^2-(a-b)^2$ en sorte qu'on a $h^2 = \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$
les quantités entre crochets étant la différence des carrés de deux nombres on peut écrire $h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$
Cette formule donne la hauteur en fonction des 3 côtés du triangle. [illegible] Héron a démontré [illegible] à cette formule une forme plus simple. Si l'on désigne par $2p$ le périmètre du triangle l'on aura :
$a+b+c = 2p$ d'où l'on déduira en retranchant des deux membres de l'égalité successivement $2a$, $2b$, $2c$

$$b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$$
$$a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$$
$$a+b-c = 2p-2c = 2(p-c)$$

Les trois facteurs du (?) devient

$$h^2 = \frac{4p\times(p-c)\times 2(p-b)\times 2(p-a)}{4a^2}$$

On divisant par 4 les deux membres de la fraction et effectuant l'extraction des racines on a

$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

d'où $h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Comme la surface d'un triangle est égale à $a \times \frac{h}{2}$ ou $S = \frac{a}{2} \times h$.

Remplaçant h par sa valeur il vient

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On peut trouver cette formule de la manière suivante. Comme l'aire d'un triangle est égale à la moitié de son périmètre multiplié par le rayon du cercle inscrit.

Soit le triangle ABC. Je détermine le centre du cercle inscrit en menant les bissectrices. Ces bissectrices divisent le triangle en 3 : AOB. AOC. BOC.

Il est clair que l'aire du triangle ABC = la somme des aires des 3 petits tri

l'aire de BOC = $\frac{ar}{2}$ r étant le rayon du cercle inscrit ce rayon est la hauteur puisqu'il est perpendiculaire à la ligne BC de même l'aire du triangle AOC = $b\times\frac{r}{2}$ l'aire de AOB = $c\times\frac{r}{2}$ si on désigne par S l'aire du triangle ABC on aura

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c).$$

Si l'on représente $a+b+c$ par $2p$ on aura

$$S = pr.$$

Exercice. Livre III. Problème III.

Aire du trapèze. Soit le trapèze ABCD.

Je mène la diagonale DB. Il est divisé ainsi en deux triangles.

D C K A H B

L'aire de ADB = $\frac{AB}{2}\times DH$

l'aire de DCB = $\frac{DC}{2}\times BK$. L'aire du trapèze entier donc $\frac{AB}{2}\times DH + \frac{DC}{2}\times BK$

Or comme $BK = DH$ on a enfin

$$S = \left(\frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}\right) DH$$

$$= \left(\frac{AB+DC}{2}\right) DH.$$

1 Le carré construit sur la somme de 2 lignes est équivalent à la somme des carrés construits sur ces lignes + 2 fois le rectangle ayant l'une de ces lignes pour base et l'autre pour hauteur.

Soit AB l'une des lignes données et BC l'autre, le carré construit sur leur somme sera le carré ACDF. Si par B je mène BG perpendiculaire à CA, si je prends sur AF une partie de [illegible] [illegible] et si par K je mène une perpendiculaire à AF rencontrant BG en O, il est clair que le carré [illegible] sera le carré construit sur la ligne BC, que le carré ABOK sera le carré construit sur la ligne AB et les deux rectangles [illegible] et OGFK seront des rectangles ayant l'une des lignes pour base et l'autre pour hauteur. Or comme le carré ACDF comprend le carré construit sur AB, le carré construit

sur BC et les deux rectangles dont on vient de parler le théorème est démontré.

Théorème. Le carré construit sur la différence de deux lignes est équivalent à la somme des carrés de ces lignes — 2 fois le rectangle construit avec une de ces lignes pour base et l'autre pour hauteur. Soient deux lignes AB et BC. La différence de ces lignes sera AC. Construisons le carré ABDF sur AB et le carré ACHG sur AC la différence des deux lignes. Prolongeons CH jusqu'en I. Prolongeons aussi FG de BE et construisons le rectangle [illegible] FGHE sur FG. On voit que la figure égale au carré ABDF ou [illegible] carré [illegible] et que de cette somme on retranche les deux rectangles ICBD [illegible] en

un carré CHCA est commun à chacun des rectangles donc ils sont équivalents les 2 [illegible] le théorème est démontré

Théorème. Le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes droites est équivalent à la différence des carrés construits sur ces deux lignes. [illegible] l'une de ces lignes BC l'autre. Si nous prenons sur [illegible] AC' [illegible] des deux lignes [illegible] le rectangle ADCK aura pour base la somme des deux lignes et pour hauteur leur différence. [illegible] par le point C' on mène [illegible] C'I à AD [illegible]

[illegible] ADCK = [illegible]

$- [illegible] OHK = AB^2 + AB \times BC - AB \times BC - \overline{BC}^2 = AB^2 - BC^2$

Ces deux rectangles MOBC et OKBC [illegible] de même le rectangle OKBC est équivalent

un rectangle GIHD, si l'on réunit aussi
du carré GFBA construit sur AB on réunira
le carré BOFI construit sur BC on aura
la somme des deux rectangles ABOD et CIHD
équivalente au rectangle AKDC. Le théorème
est donc démontré.

Théorème.

Si une droite donnée AB est divisée en [illegible]
points [illegible] et [illegible] de leur distance
aux points A et B [illegible] est [illegible] fort donné
[illegible] la droite AB [illegible]
[illegible] quelconque [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] les points A et B un
[illegible] point [illegible] tel que l'on ait
A [illegible] = [illegible] équivalent [illegible]
[illegible] la droite [illegible]

[illegible] le [illegible] mobile [illegible] point
[illegible] B [illegible] d'abord [illegible]
[illegible] au point A [illegible]
[illegible] de A en B [illegible]
[illegible]
[illegible] avec du [illegible]
[illegible]
[illegible] rapport [illegible]
donc continuellement [illegible]
[illegible] point B [illegible] rapport [illegible]
[illegible]
le rapport est [illegible] toute quantité [illegible]
[illegible] dénominateur devient = [illegible]
Donc lorsque le mobile [illegible] B
le rapport des distances croît [illegible]
[illegible]
toute quantité donnée. Il existe [illegible] le
mobile une position du point M [illegible]
pour laquelle on aura $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ [illegible]
[illegible] unique seule position [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]rtions [illegible] [illegible]

[illegible] de AB, il existe un 1er point P qui

[illegible]

[illegible] on a par hypothèse m/n

[illegible] que la distance du mobile au

[illegible] B.

[illegible] montrer un 2d point existe [illegible]

[illegible] figure à la [illegible] du point

[illegible] mobile en P [illegible] des points

[illegible] $= \frac{AB + BP}{PB}$

$= 1 + \frac{AB}{BP}$. [illegible]

le mobile s'éloigne du point B la

[illegible]

[illegible] rapport $\frac{AB}{BP}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] est en B comme BP = 0 ([illegible])

[illegible] quantité donnée et lorsque le mobile

[illegible] que le rapport [illegible] minimum [illegible]ment et comme BP augmente continuellement le rapport $\frac{PA}{PB}$ [illegible] continuellement [illegible] les variations sont contraires. Donc [illegible] rapport $\frac{PA}{PB}$ [illegible] toujours [illegible]

[illegible] $= \frac{m}{n}$ [illegible]

[illegible] le rapport $\frac{m}{n}$ [illegible]

[illegible] B [illegible] point [illegible] 3

[illegible] point P [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{m}{n} = 1$ le point [illegible]

[illegible] le point P s'éloignerait [illegible]

[illegible] droite et à gauche du point [illegible]

[illegible] l'infini.

[illegible] points M et P qui remplissent les conditions telles que l'on a $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ s'appellent des points <u>conjugués</u> [illegible] aux points A et B.

[illegible] algébriques.

[illegible] lignes [illegible] des lettres. [illegible] le problème en équation [illegible] des relations [illegible] entre les données et les inconnues

[illegible] construction [illegible] les [illegible]

[illegible] les [illegible]

valeurs des inconnues. Souvent on veut construire les résultats que l'on a [illegible] c.à.d. [illegible] on les détermine à l'[illegible] [illegible]. Nous allons indiquer comment on construit un certain nombre de ces expressions.

(1) Construire $x = \frac{ab}{c}$. Donc x est 4e proportionnelle aux 3 lignes, c, a, b.

(2) Construire $x = \frac{a^2}{b}$. Donc x est 3e proportionnelle à a et b

(3) Construire $x = \frac{abcd}{mnp}$. On construit [illegible] $y = \frac{cd}{p}$ [illegible] $x = \frac{aby}{mn}$. On construit une 4e proportionnelle z à n b y et on a à construire $x = \frac{az}{M}$ et l'on voit que x est une 4e proportionnelle à m a z [illegible].

(4) Construire $x = \sqrt{ab}$. x est une moyenne proportionnelle entre a et b.

[illegible] $= \sqrt{\frac{[illegible]}{m n}}$ [illegible]

[illegible] $x = \frac{\sqrt{[illegible]}}{m}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $x = \sqrt{a [illegible]}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] ou comment on construirait $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

$x = \sqrt{a^2 - b^2}$

[illegible] $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$ $x^2 = a + b$ [illegible]

[illegible] construction. Dans ce dernier cas

[illegible] rendre pour x une [illegible]

[illegible] $a + b$ et $a - b$ mais non $a^2 + b^2$

[illegible]

[illegible]

[illegible] donnés [illegible] points [illegible] sur une droite

[illegible] droite les points

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] C [illegible]

[illegible] AM [illegible]
[illegible] AM = [illegible] plus [illegible]
[illegible] une parallèle à AM [illegible]
[illegible] $\frac{m}{n}$ [illegible] A [illegible]
MN cette ligne coupe AB en C [illegible]
répondra à la question. En menant [illegible]
[illegible] AM [illegible] [illegible]
coupe AB en un point D qui répondra aussi
à la question. Cela résulte [illegible]
[illegible] des triangles
CAM, BCN qui donnent $\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$
[illegible] des
triangles AMD et DBN qui donnent

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$$ [illegible]

[illegible] points trouvés [illegible]
d'ailleurs que ces [illegible] seuls [illegible]
[illegible] distances aux points A et B
dans le rapport de m à n.

Note

[illegible] système de numération

[illegible] système de numération [illegible] est l'exécution des

principes [illegible] [illegible]

[illegible] les nombres

[illegible] système de numération

nombre d'unités du premier ordre qu'il

faut pour former une unité du second ordre.

Le nombre des unités de chaque ordre varie

avec la base du système ; si b est la base

d'un système, b unités du premier ordre for-

meront une unité du second ordre ; b

unités du second ordre ou b^2 unités du

premier ordre formeront une unité

du troisième ordre et ainsi de suite.

[illegible]

[illegible]

[illegible] système. [illegible]

[illegible]

[illegible]

système ternaire 2.

Le zéro appartient à tous les systèmes.
Dans le système binaire les chiffres seraient 0 et 1; dans le système septénaire 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, et dans le système duodécimal 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β [illegible]

Dans [illegible] système de numération les chiffres ont deux valeurs [illegible] absolue, l'autre relative.

Pour écrire les nombres dans un système quelconque il suffit de connaître [illegible] convention suivante. Tout chiffre placé à la gauche d'un autre [illegible] supérieur à celui de [illegible] [illegible] droite,

Problème. Un nombre est écrit dans un système quelconque, on demande de l'écrire dans le système décimal.

Soit 51056 [illegible] écrit dans le système duodécimal. Puisque dans ce système une

unité à l'ordre, vaut 12 unités du
l'ordre, [illegible] unités du [illegible] ordre vau-
dront 4×12 ou 48 du 1er. Mais le
nombre contient en outre 7 unités
du 1er ordre, [illegible] représentent en nom-
bre 48+7 ou 55 unités du 1er ordre. De
même une unité du 3e ordre en vaut
12 du 2e; 8 unités du 3e ordre vaudront
8×12 ou 96 unités du 2e ordre. Ces
96 [illegible] unités du
même ordre contenues dans le nombre
donné [illegible] 690 unités
du 2e ordre. [illegible]
naire on trouvera 690×12+6 ou 8286
unités du [illegible] ordre, 8286×12+1, ou 99433
unités du [illegible] ordre. [illegible] ou 119324
unités [illegible] 1666
[illegible] décimal.
[illegible] 1193 [illegible]
[illegible] [illegible] étant

est donné en système dont la base est b,
pour l'avoir dans le système décimal
on multiplie le premier chiffre à gauche
du nombre par la base b du système
et on ajoute au produit le chiffre suivant.
On multiplie la somme par la base
et on ajoute au [illegible] le [illegible]
le chiffre suivant. On continue ainsi
jusqu'à ce qu'on ait ajouté le dernier
chiffre du nombre.

Remarque. Si nous désignons par b_5 b_4 b_3
b_2, b_1 les chiffres successifs du nombre
à partir de la droite, ce nombre sera
exprimé par la formule $b_5 b^4 + b_4 b^3 + b_3 b^2$
$+ b_2 b^1 + b_1$. Cette formule [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
système décimal.

Problème 11. Un nombre est écrit dans le
système décimal on demande de l'écrire
dans un système quelconque. Soit [illegible]

suit dans le système décimal, on demande de l'écrire dans un système [illegible] dans ce système, soit de base 12.

[illegible: successive divisions by 12, 12, 12, 12]

Puisque dans le système [illegible] il faut douze unités d'un certain ordre pour faire une unité de l'ordre immédiatement supérieur, [illegible] 34 contiendra 12 [illegible] [illegible] [illegible] premier ordre. [illegible] [illegible] nombre. [illegible] par 12 [illegible] [illegible]

du 3e ~~nombre~~ ordre est le reste 1 sera le chiffre des unités du second ordre. Le même quotient 4561 divisé par 12 donne pour quotient 380 d'unités du 4e ordre et le reste 8 sera le chiffre des unités du 3e ordre. Enfin le quotient 380 divisé par 12 donne 31 pour quotient unités du 5e ordre et ainsi 7 est le chiffre des unités du 4e ordre. Ainsi le nombre 54734 écrit dans le système décimal s'écrit 27812 dans le système duodécimal.

261. En général si l'on a un nombre écrit dans le système décimal pour l'écrire dans un système dont la base est b, on le divise par b puis le quotient obtenu par b et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on trouve un quotient inférieur à b. Le dernier quotient et les restes successifs sont les chiffres du nombre donné.

262. Remarque. La relation $N = A_5 b^4 + A_4 b^3 + A_3 b^2 + A_2 b + A_1$ nous permet aussi de préciser [illegible]

[illegible] multiple de [illegible]

A_1 or A_1 [illegible] le

[illegible] de cette division [illegible] b [illegible] le quotient

de cette division on aura

$$A_1 = A_3 b^3 + A_4 b^2 + A_5 b + A^2$$ d'où l'on

[illegible] A_2 [illegible] division

[illegible] A_2, on a

$A_2 = A_4 b^2 + A_5 b + A_5$ [illegible] A_5 [illegible]

[illegible] 2 par [illegible].

Problème III. Un nombre étant écrit dans un

système [illegible] le [illegible] dans

un autre système.

Soit N un nombre écrit dans le système

dont la base est b, [illegible] le [illegible]

dans un autre système dont la base est b'.

Pour [illegible] système [illegible]

[illegible] nombre [illegible]

dans le système décimal et ensuite

[illegible] système [illegible]

[illegible] est 6.

Remarque I. Jusqu'ici [illegible] fait [illegible]
les opérations sur les nombres entiers [illegible]
d'après [illegible] règles [illegible] à celles
que nous avons établies au livre I.

R. II. Les propriétés des nombres [illegible]
sont par [illegible]
[illegible]

Mouvement varié.

Quand un mouvement est varié on ne peut plus dire que l'espace est l'espace parcouru pendant l'unité de temps puisque cette vitesse est variable. Supposons qu'un mobile se meuve sur la droite xy, qu'au bout du temps T il soit en M et au bout du temps T' $(T' > T)$ en M'.

Il est clair que pendant le temps $T'-T$ l'espace parcouru par le mobile est MM'. Si l'on divise l'espace MM' par le temps $T'-T$ le quotient $\frac{MM'}{T'-T}$ est ce qu'on appelle la vitesse moyenne du mobile pendant le temps $T'-T$. Si l'on suppose que la différence $T'-T$ devienne de plus en plus petite, ce qui [illegible] T' se rapprochera de plus en plus de T, quand le temps $T'-T$ sera très petit la limite du rapport [illegible] de l'espace au temps est ce qu'on appelle vitesse du corps au bout du temps T. Supposons que

l'équation du mouvement soit donnée par

$$e = a t^2 \quad (1).$$

Cherchons la vitesse du mouvement au bout du temps T. Désignons par $e + \xi$ l'espace parcouru pendant le temps $T + \theta$. On aura d'après (1) on a —

$$e + \xi = a(T+\theta)^2$$

$$\text{d'où } e + \xi = aT^2 + 2aT\theta + a\theta^2. \quad (2)$$

Pour obtenir l'espace parcouru pendant le temps θ il suffit de retrancher (1) de (2) on a —

$$\xi = 2aT\theta + a\theta^2$$

Divisant par θ les deux membres on a

$$\frac{\xi}{\theta} = 2aT + a\theta.$$

Comme on cherche la vitesse il faut supposer un mouvement uniforme pendant que le temps θ soit extrêmement petit. Il faut donc chercher la limite du rapport $\frac{\xi}{\theta}$ ce qui donne, en faisant décroître θ

moindre $\theta = 0$.

ainsi $\frac{i}{\theta} = 9°0'$.

[illegible] cette limite [illegible]

[illegible] on a [illegible]

$V = 1,54$!

Principe [illegible] machine d'A[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] HF [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] P [illegible] [illegible] [illegible] Accélération du mouvement [illegible] [illegible] [illegible] aux mettre en traînées [illegible]

$$\frac{f'}{g} = \frac{\frac{p}{g}}{\frac{2P+p}{g}}$$. $\frac{p}{g}$ est la masse de p, $\frac{2P+p}{g}$ celle de $2P+p$.

D'où $$\frac{f'}{g} = \frac{p}{2P+p}.$$

On a donc un rapport constant entre l'accélération du mouvement de la machine et celle du mouvement [illegible] de la chute libre ; les lois des 2 mouvements sont donc les mêmes en sorte que les lois [illegible] mouvements étudiées dans la machine [illegible] sont les mêmes que les lois qui ont [illegible] du corps tombant librement. [illegible] commencement [illegible] avec la plus grande [illegible] on [illegible] le poids P [illegible] sur une feuille et pour donner une [illegible] mobilité à la feuille on fait reposer [illegible]

P II

e

[illegible] les [illegible] parties [illegible]
[illegible] elle [illegible] très [illegible]
[illegible]
[illegible] couramment [illegible].

La [illegible] de ces jolies [illegible] plus
[illegible]
qui est divisée en parties égales en [illegible]
[illegible] Cette colonne est placée [illegible] des
[illegible] colonne. [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] colonnes [illegible]
qui est le [illegible], en oscillant, [illegible]
peut marcher [illegible] qui s'appuie contre
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible].

[illegible] pour [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] on met un petit

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] les

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible],

on [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

de façon que le [illegible] de la flûte [illegible] [illegible]

au moment où le pendule bat la seconde.

[illegible] P+p [illegible] de la règle [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] P+p quand le pendule bat la seconde

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] que fait [illegible] [illegible] [illegible] bruit

[illegible] [illegible] doit coïncider avec le bruit

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

bruits coïncident exactement. On note

alors la division où se trouve [illegible] [illegible]

[illegible] à cette division; avoir exactement l'espace parcouru pendant 1'' était fait [illegible] pour le plus [illegible] [illegible] pendant 1'' x. 2 fois [illegible] pendant 2'' et [illegible] $4x$ [illegible] puis pendant 3, 4'' [illegible] $9x$, $16x$ etc. Comme les nombres x, $4x$, $9x$, $16x$, sont égaux à $x \times 1^2$, $x \times 2^2$, $x \times 3^2$, $x \times 4^2$ etc. [illegible] les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

Rem. [illegible] être exprimée, [illegible] avoir déterminé exactement [illegible] pour avoir les espaces parcourus pendant 2, 3, 4'' [illegible] $4x$, $9x$, $16x$ [illegible] et passe à ces divisions [illegible] 2, 3, 4'' [illegible]

[illegible] espaces parcourus sont comme les
[illegible] la
[illegible] représente
[illegible] parcouru. $e = at^2$

2e Loi. — [illegible]
[illegible] à l'extrémité [illegible]
[illegible] parcourus aux temps employés à les
[illegible] Si l'on
veut que la vitesse au bout d'un [illegible]
temps [illegible] cette
vitesse du mouvement uniforme qui succ-
édant à ce mouvement varié [illegible]
[illegible] machine
[illegible]
[illegible] poids
$P + p$ après 1, 2, 3″ [illegible]
[illegible]
on place le poids $P + p$ sur le plateau [illegible]
qui se trouve au 0 de la règle; on donne
[illegible]

poids P sont également [illegible]), puis on [illegible]
la division d'un cercle en [illegible]
par d'un [illegible] central qui permet de lire
P en [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] plus [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] au bout de 1'' [illegible]
[illegible] [illegible]. [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] centre [illegible] d'un mouvement
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
2'' [illegible] [illegible] 3a de la [illegible]
ou [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] cette
[illegible] au bout de 2''. [illegible] [illegible].
espace parcouru par le corps pendant la
2'' [illegible] [illegible] [illegible] par [illegible]
au bout de 1'' est 3a - a ou 2a; pour
obtenir [illegible] [illegible] au bout de 2''
on [illegible] [illegible] [illegible] pendant
2'' [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

le point mobile [illegible] aura été [illegible]
sera arrêté, l'autre mouvra d'un mouve-
ment uniforme et on trouvera qu'au bout
de 1" [illegible] 3" [illegible]
la division 8a; par suite la vitesse acquise
au bout de la 2e seconde sera 8a - 4a = 4a.
[illegible] division [illegible]
[illegible]
pendant 3" il se trouvera à la division 9a,
si à 9a on place le curseur annu[illegible]
il sera arrêté et [illegible] marcher pendant 1",
[illegible] au bout de 1" [illegible] 15a.
[illegible] la vitesse acquise au bout de la 3e se-
conde 15a - 9a = 6a.

[illegible] vitesses 2a, 4a, 6a, 8a etc.
sont proportionnelles [illegible] 1, 2, 3, 4 [illegible]
[illegible] les vitesses acquises par
un corps dans sa chute sont proportionnelles
aux temps [illegible] par la vitesse
la acquise au bout de l'unité de temps

est parcouru [illegible] pendant
cette unité de temps.
4/ [illegible] pour la machine d'Atwood
[illegible] $e = at^2$ la vitesse est donnée
par la formule $v = 2at$.
C'est ce qui montre que les nombres 3, 8, 15, 24
qui [illegible] la quantité a [illegible]
[illegible] les petits intervalles [illegible]
[illegible] plus [illegible]
respectivement égaux à $2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1$ etc.
Avec la machine d'Atwood on ne
peut pas déterminer la quantité g car dans
la formule $\frac{a}{g} = \frac{p}{2P+p}$ dans
laquelle [illegible] étant égal
à $2a$. on a

$$\frac{2a}{g} = \frac{p}{2P+p} \quad \text{ou} \quad g = 2a\frac{(2P+p)}{p}$$

Comme la quantité a n'est pas très
déterminée avec une grande exactitude
mais une erreur [illegible] étant multi-
pliée par $(2P+p)$ qui est très

... accomplit, il se donnera ... avec une augmentation aussi facile [illegible] etc.

Comme il ne se presse [illegible] ... tire la bride des cavaliers qui ... naturellement ... [illegible] ... [illegible] ... [illegible] direction.

Appareil Morin.

Pour concevoir l'idée des espaces, comme ayant d'abord décrit sous [illegible] le mouvement était uniforme [illegible] parcourt la circonférence d'un cercle divisé en AC, il est clair que, sur AC à partir du point A ... égales AG, DH, ... en hauteur [illegible]

A G' D F G H C

G F' G' H'

ces longueurs représentent les temps employés pour
arriver par les points D, F, ... menons les
perpendiculaires à AC' ... les hauteurs
jusqu'à leur rencontre avec la courbe aux
points D', F', ... qui comme ... représentent
les espaces parcourus pendant les
temps AD sont ... représentés
par AD', D'F' et comme on trouve qu'en
mesurant les distances AD', AF' on trouve
que ces distances sont proportionnelles aux
carrés des nombres 1, 2, 3 ... il en résulte que
la loi des espaces est vérifiée.

On peut aussi vérifier la loi des vitesses.
Pour cela on ... par les points
D', F', ... menons les tangentes à la
courbe AD'A' lesquelles sont représentées
par les tangentes trigonométriques des
angles AD'D'' qui forment les tangentes
géométriques au ... AC et on constate
que ces tangentes trigonométriques sont les

[illegible] et proportionnelle à la durée [illegible] proportionnelle aux temps.

Problèmes relatifs à la chute des corps.

[illegible]

Un corps tombe sans vitesse initiale d'une hauteur h placé au dessus du sol !
Si l'on désigne par g l'accélération [illegible] [illegible] d'une seconde l'espace parcouru pendant [illegible] $\frac{g}{2}$ [illegible] que on a dit plus haut et les équations du problème seront $e = \frac{gt^2}{2}$ et $V = gt$.

Ici on a $e = h$. On a :

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

$$v = gt \quad (2)$$

De (1) on tire $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Portant dans (2) cette valeur de t, il vient

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2g^2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$ [illegible]

[illegible] donc [illegible]

[illegible] la vitesse en arrivant [illegible]

$$V = \sqrt{2 \times 9.8088 \times 160}.$$

2e question

[illegible] corps tombe d'une hauteur h avec une vitesse initiale V_0; [illegible] sera [illegible] au bout [illegible]?

[illegible] les [illegible] du [illegible] uniformément accéléré:

$$V = V_0 + gt \quad (1)$$

$$e = V_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (2).$$

[illegible] trouver la vitesse V au bout du temps t [illegible] les équations (1) (2).

[illegible] on déduit $t = \frac{V - V_0}{g}$.

Substituant [illegible] dans (2) on a

$$e = \frac{V_0(V - V_0)}{g} + \frac{g}{2}\left(\frac{V - V_0}{g}\right)^2$$

[illegible] simplifiant, on a

$$e = \frac{2V_0(V - V_0) + (V - V_0)^2}{2g}$$

$$e = \frac{2V_0V - 2V_0^2 + V^2 - 2VV_0 + V_0^2}{2g} \; ; \; e = \frac{V^2 - V_0}{2g}$$

Ainsi quand le corps arrivera sur le sol [illegible] passant [illegible] sera [illegible] ou $h = \frac{V^2 - V_0^2}{2g}$; d'où $V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$.

3

Un corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale V_0; trouver que quand il reviendra [illegible] point de départ [illegible] vitesse [illegible]

Ce mouvement est uniformément retardé; ses équations sont:

$$V = V_0 - gt \ (1) \quad e = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \ (2).$$

(1) Cherchons d'abord le temps de l'ascension. Il est clair que, quand le corps s'arrêtera, V sera nul [illegible] par conséquent d'après (1) la durée de l'ascension est donnée par $0 = V_0 - gt$ d'où $t = \frac{V_0}{g}$ (3).

2. Pour avoir la hauteur h il suffit de remplacer dans (2) e par h et t par $\frac{V_0}{g}$ ce qui donne $h = V_0\left(\frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} \times \frac{V_0^2}{g^2}\right)$ ou $h = \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g}$ donc $h = \frac{V_0^2}{2g}$. [illegible] corps [illegible] $V = \sqrt{2gh}$ [illegible] h par sa valeur $\frac{V_0^2}{2g}$ [illegible]

$V = \sqrt{2g \times \frac{V_0^2}{2g}} = \sqrt{V_0^2} = V_0$. [illegible]

il s'est élevé. Il est facile de faire voir que la durée de la descente est égale à la durée de l'ascension. En effet pour avoir le temps de la chute il faut prendre la formule $h = \frac{gt^2}{2}$. Et, comme $h = \frac{v_0^2}{2g}$, on a $\frac{v_0^2}{2g} = \frac{gt^2}{2}$, ou $v_0^2 = g^2t^2$ ou $t = \frac{v_0}{g}$ (4) Et comme t a la même valeur dans ~~(4)~~ (3) et (4) il s'ensuit que les deux durées sont égales. On démontre assez facilement que, dans le problème qui nous occupe, en négligeant la résistance de l'air, lorsque le corps passe en un point soit en montant soit en descendant il a la même vitesse.